

# MODELO DE PROPAGAÇÃO DE ONDAS MONOCROMÁTICAS EM PRAIAS

---



 **Oluca-MC**

**MANUAL DE REFERÊNCIA**

---

### **Observação Jurídica**

Nenhum dos participantes, nem as instituições as quais representam no desenvolvimento do SMC-Brasil, são responsáveis pela utilização dada a esta publicação.

A base de dados de ondas em águas profundas (GOW) e de níveis (GOT; GOS) incluída no SMC-Brasil são de propriedade do IH Cantabria. O SMC-Brasil permite o processamento e análise de tais dados ao longo da costa brasileira. Todavia, esses dados não estão disponíveis para os usuários do sistema, apenas o dado processado e analisado por cada usuário. O uso inadequado desses dados ou dos resultados obtidos a partir destes, bem como as ferramentas não são de responsabilidade do IH Cantabria ou do grupo que desenvolveu o projeto. Os usuários não podem utilizar técnicas de engenharia reversa, descompilar ou fazer o *download* da base de dados de ondas e níveis do *software* SMC-Brasil.

**Contribuições e Desenvolvimento**

**Instituto de Hidráulica Ambiental da Cantabria (IH Cantabria)**

**Universidade da Cantabria**

**Instituição líder do projeto:** Mauricio González (principal pesquisador do projeto), Raúl Medina, Omar Gutiérrez (coordenador do projeto), Nabil Kakeh, Cynthia Martínez, Roland Garnier, Lara Ruiz, Jara Martínez, Verónica Canovas, Laura Ribas de Almeida, Belén López, Fernando Méndez, Antonio Espejo, Melisa Menéndez, Ana Abascal, Sonia Castanedo.

**Laboratório de Oceanografia Costeira - Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)**

**Líder local do projeto:** Antonio Henrique da Fontoura Klein (principal pesquisador do projeto), Clarissa Brelinger De Luca, Priscila Hoerbe Soares, Paula Gomes da Silva, Jonas Gomes Oliveira, Maiara Werner Pinto, Charline Dalinghaus, Caio Trajano Siqueira Salgado, Julia Gil dos Santos.

**Instituto Oceanográfico – Universidade de São Paulo (USP)**

**Líder local do projeto:** Moyses Gonzalez Tessler (principal pesquisador do projeto), Samara Cazzoli y Goya.

**Gerenciamento Costeiro – Ministério do Meio Ambiente (MMA)**

**Colaboradores:** Márcia Regina Lima de Oliveira, Leila Swerts, Adalias Freires Bastos, Salomar Mafaldo de Amorim Júnior, Flávia Cabral Pereira, Bruna Teixeira Pandolpho da Costa e Silva e Mateus Pereira Rodrigues Borges.

**Financiamento do projeto**

Agência Espanhola de Cooperação Internacional para o Desenvolvimento – AECID

Ministério do Meio Ambiente- MMA Brasil

Ministério do Planejamento, Desenvolvimento e Gestão/Secretaria de Patrimônio da União- MP-SPU Brasil.

**Colaboração (Fornecimento de dados)**

Marinha do Brasil

Instituto Nacional de Pesquisas Hidroviárias (INPH)

**Sumário**

CAPÍTULO 1: SOBRE ESTE MANUAL.....	12
1. Sobre este Manual.....	13
1.1 Objetivos .....	13
1.2 Conteúdo.....	13
CAPÍTULO 2: APRESENTAÇÃO TEÓRICA DO PROBLEMA .....	15
2. Apresentação Teórica do Problema.....	16
2.1 Introdução .....	16
2.2 Modelos de propagação de ondas.....	18
2.3 Dispersão das ondas devido à amplitude .....	25
2.4 Modelagem da dissipação de energia.....	30
2.5 Modelagem das ondas .....	37
2.6 Hipóteses do modelo parabólico.....	37
CAPÍTULO 3: FORMULAÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA .....	40
3. Formulação Numérica do Problema.....	41
3.1 Introdução .....	41
3.2 Equações a discretizar .....	41
3.3 Discretização do domínio.....	44
3.4 Resolução das equações.....	46
3.5 Implementação numérica da equação de propagação.....	49
3.6 Implementação numérica das condições de contorno .....	50
3.7 Sistema de equações a resolver.....	53
3.8 Implementação numérica dos termos não lineares .....	55
3.9 Implementação numérica de quebra.....	55
3.10 Modelagem de áreas de terra no interior do domínio.....	57
3.11 Filtro do ruído numérico.....	59
CAPÍTULO 4: ESTRUTURA DO CÓDIGO DO PROGRAMA.....	61
4. Estrutura do Código do Programa .....	62
4.1 Introdução .....	62
4.2 Descrição de sub-rotinas .....	63
CAPÍTULO 5: APLICAÇÃO DO MODELO OLUCA - MC .....	72
5. Aplicação do Modelo OLUCA - MC.....	73
5.1 Introdução .....	73
5.2 Fenômenos de propagação com solução analítica conhecida .....	73
5.3 Fenômenos de propagação (refração-difração) em um teste físico .....	88

## MANUAL DE REFERÊNCIA – OLUCA – MC

### Sumário

---

5.4 Fenômenos de propagação, interação onda-corrente.....	98
REFERÊNCIAS .....	105

**Lista de Figuras**

Figura 1 – Variação das relações de dispersão lineares e não lineares com $kh$ e esbeltez da onda $\epsilon$ (KIRBY; DALRYMPLE, 1986 a).....	29
Figura 2 – Visualização do fundo na zona de surfe para o modelo de dissipação por quebra (DALLY; DEAN; DALRYMPLE,1985).....	34
Figura 3 – Malha de referência. ....	45
Figura 4 – Subdivisão da malha principal.....	47
Figura 5 – Interpolação dos dados.....	48
Figura 6 – Domínio numérico do problema de valor inicial apresentado. ....	48
Figura 7 – Esquema implícito de seis pontos.....	49
Figura 8 – Condições de contornos laterais abertos. ....	52
Figura 9 – Algoritmo de quebra.....	57
Figura 10 – Representação de áreas de terra no modelo. ....	59
Figura 11 – Estrutura do Código Fortran.....	64
Figura 12 – OLUCA-MC: Programa principal (Nível 1).....	65
Figura 13 – OLUCA-MC: Sub-rotina MODEL (Nível 2).....	66
Figura 14 – Esquema de batimetria reta e paralela.....	74
Figura 15 – Fenômeno de empinamento sobre uma declividade. ....	75
Figura 16 – Fenômeno de refração. Coeficiente de propagação e direção de propagação na profundidade relativa $kh$ . Ângulos de incidência de 15 e 30 graus. ....	77
Figura 17 – Fenômeno de refração. Coeficiente de refração e direção de propagação em função de $kh$ . Ângulos de incidência de 45, 50 e 60 graus.....	78
Figura 18 – Diagrama de difração das ondas. Comparação com a solução analítica. Ângulo de incidência: $-30^\circ$ . ....	81
Figura 19 – Diagrama de difração das ondas. Comparação com a solução analítica. Ângulo de incidência: $-15^\circ$ . ....	82
Figura 20 – Diagrama de difração das ondas. Comparação com a solução analítica. Ângulo de incidência: $0^\circ$ . ....	83
Figura 21 - Diagrama de difração de ondas. Comparação com a solução analítica. Ângulo de incidência: $+15^\circ$ . ....	84
Figura 22 – Diagrama de difração das ondas. Comparação com a solução analítica. Ângulo de incidência: $+30^\circ$ . ....	85
Figura 23 – Geometria do domínio. Calibração da quebra de onda. ....	88
Figura 24 – Resultados para o teste de quebra da onda. Perfil de altura de onda em função da distância da costa.....	88

---

Figura 25 – Batimetria do teste de Berkhoff (1982), perspectiva 3D. ....	90
Figura 26 – Comparação de resultados experimentais e numéricos para as seções 1 e 2. ....	93
Figura 27 – Comparação de resultados experimentais e numéricos para as seções 3, 4 e 5. ....	94
Figura 28 – Comparação de resultados experimentais e numéricos para as seções 6, 7 e 8. ....	95
Figura 29 – Altura de onda relativa à altura de onda incidente em todo o domínio. Modelo linear composto de Kirby e Dalrymple (1984). ....	97
Figura 30 – Domínio de propagação. Caso de Arthur. ....	99
Figura 31 – Perfis característicos da corrente de retorno. ....	100
Figura 32 – Representação vetorial da corrente de retorno. Resultados para um modelo de propagação de raios (ARTHUR, 1950). ....	101
Figura 33 – Distribuição de alturas de ondas obtidas por Kostense, Dingemans e Van de Bosch (1988). ....	102
Figura 34 – Isolinhas de altura de onda obtidas por Rodríguez (1993), esquerda. Isolinhas de nível de altura de onda obtidas pelo modelo OLUCA-MC, direita. ....	103
Figura 35 – Isolinhas de alturas de onda para incidência +30 graus. Esquerda: Rodríguez (1993). Direita: modelo OLUCA-MC. ....	104

**Lista de Quadros**

Quadro 1 – Valores de $\Gamma$ , K e erro para diferentes declividades.....	35
Quadro 2 – Dimensões dos canais testados.....	86
Quadro 3 – Condições das ondas incidentes nos canais testados.....	87
Quadro 4 – Localização das seções das medidas experimentais. ....	91



**Lista de Abreviaturas**

COPLA – Modelo de Correntes por Quebra em Praias

CPU - *Central Processing Unit*

DIVX – Subdivisões Máximas para o Código do Modelo OLUCA-MC em X

DIVY – Subdivisões Máximas para o Código do Modelo OLUCA-MC em Y

DXR – Discretização espacial em X

DYR - Discretização espacial em Y

IH – Instituto Hidráulico

MC – Modelo de Ondas Monocromáticas

MOPLA – Modelo de Morfodinâmica de Praias

OLUCA – Modelo de Propagação de Ondas em Praias

REF/DIF – Modelo de Refração-Difração

SMC – *Sistema de Modelado Costero* / Sistema de Modelagem Costeira

SP – Modelo de Ondas Espectrais

WKB – *Wentzel-Kramers-Brillouin*

---

**Lista de Símbolos**

- $\alpha$  – Ângulo que forma a onda com o eixo x/Direção de propagação.  
 $\tilde{a}$  – Termo não linear  
 $A$  – Amplitude da onda  
 $A_{i,j}$  – Valor da amplitude complexa antes de realizar a filtragem  
 $A_{i,j}^f$  – Valor da amplitude complexa filtrado uma vez  
 $A(x, y)$  – Amplitude complexa  
 $b$  – Número de onda na direção y  
 $c$  – Celeridade/Velocidade da onda  
 $c_0$  – Velocidade da onda em águas profundas  
 $c_g$  – Celeridade/Velocidade de grupo  
 $\zeta$  – Superfície livre  
 $C_p$  – Coeficiente de permeabilidade  
 $Ck$  – Expressões complexas dependentes  
 $CPk$  – Expressões complexas dependentes  
 $D$  – Parte do termo não linear da equação de propagação da onda  
 $E$  – Energia da onda por unidade de superfície  
 $Ec_g$  – Fluxo de energia integrado verticalmente  
 $(Ec_g)_e$  – Fluxo de energia associado à onda estável  
 $f$  – Coeficiente de atrito de Darcy-Weisbach  
 $f_{\tilde{u}}$  – Coeficiente de atrito de Darcy-Weisbach  
 $f_{\omega}$  – Coeficiente de Darcy-Weisbach para ondas  
 $g$  – Aceleração da gravidade  
 $G$  – Termo não linear  
 $h$  – Profundidade  
 $h'$  – Profundidade no fundo horizontal  
 $H$  – Altura de onda  
 $H_0$  – Altura de onda em águas profundas  
 $k$  – Número de onda  
 $k_0$  – Número de onda  
 $K$  – Coeficiente adimensional de decaimento  
 $K$  – Parâmetro do modelo de dissipação por quebra  
 $L$  – Comprimento de onda  
 $L_0$  – Comprimento de onda em águas profundas  
 $\omega$  – Frequência intrínseca

$T$  – Período de onda

$\dot{u}$  – Frequência angular absoluta

$U$  – Velocidade média de corrente na direção  $x,y$

$V$  – Velocidade de corrente na direção  $y$

$x$  – Direção de propagação

$\gamma$  – Dissipação da energia dividida pela energia

$\gamma_{qb}$  – Fator de dissipação por quebra

$\Gamma$  – Parâmetro do modelo de dissipação por quebra

$\delta$  – Parâmetro adimensional relativo a variação da profundidade

$\delta(x)$  – Taxa de dissipação de energia por unidade de área

$\varepsilon$  – Esbeltez da onda

$\nu$  – Viscosidade cinemática

$\sigma$  – Frequência angular

$\Phi$  – Potencial de velocidades

$\phi$  – Potencial na superfície livre

$\Phi_0$  – Potencial para a corrente

$\phi_2$  – Potencial para uma onda longa

## **CAPÍTULO 1: SOBRE ESTE MANUAL**

---

## 1. Sobre este Manual

### 1.1 Objetivos

O presente manual compreende uma descrição geral das equações e formulações numéricas aplicadas no modelo OLUCA-MC (modelo parabólico de propagação de ondas monocromáticas).

O OLUCA-MC faz parte do “Modelo Integral de Propagação de Onda, Correntes e Morfodinâmica em Praias” (MOPLA), o qual integra uma série de modelos numéricos que permitem realizar uma análise em curto prazo em praias

Além do OLUCA-MC, o MOPLA inclui o “Modelo de Propagação de Ondas Espectrais” (OLUCA-SP) (IH CANTABRIA – MMA, 2017a), os “Modelos de Correntes Induzidas pela Quebra das Ondas nas Praias” (COPLA-MC e COPLA-SP) (IH CANTABRIA – MMA, 2017b), e os “Modelos de Erosão/Sedimentação de Praias” (EROS-MC e EROS-SP) (IH CANTABRIA – MMA, 2017c).

O objetivo principal deste manual é dar uma ideia geral ao usuário das equações aplicadas no modelo OLUCA-MC, sem aprofundar em deduções teóricas, mas sim apresentando muito claramente as hipóteses nas quais são baseadas e sua área de aplicação. Se o usuário deseja analisar com mais detalhes alguns destes aspectos, ao final do texto é apresentada uma lista de referências para cada um dos assuntos.

### 1.2 Conteúdo

No capítulo 2 é apresentado teoricamente o problema de propagação das ondas, interação onda-corrente, hipóteses e modelos de dissipação de energia.

No capítulo 3 é apresentado o modelo numérico de discretização das equações, geração da malha e condições de contorno.

No capítulo 4 é apresentado o esquema geral do código do programa e descrição do conteúdo das sub-rotinas.

No capítulo 5 é aplicado o modelo a casos com solução analítica e/ou casos experimentais em laboratório.

No capítulo 6 é incluída a bibliografia.

**CAPÍTULO 2: APRESENTAÇÃO TEÓRICA DO  
PROBLEMA**

---

---

## 2. Apresentação Teórica do Problema

### 2.1 Introdução

A propagação de ondas sobre fundos de batimetria irregular e ao redor de promontórios ou ilhas inclui processos de empinamento, refração, dissipação de energia, difração e quebra. A complexidade destes fenômenos foi a causa de não haver até recentemente, modelos teóricos capazes de prever o comportamento das ondas devido a esses efeitos.

Existem diferentes modelos numéricos de propagação de ondas, em função das equações discretizadas e dos fenômenos que são representados. Em geral, podem ser estabelecidos os seguintes dois grandes grupos: modelos baseados na simulação de fluxos de superfície livre e os modelos baseados na teoria de propagação de ondas. Os primeiros resolvem as equações de Navier-Stokes ou as equações de Boussinesq; tratam o fenômeno de propagação de uma forma muito mais ampla e com menores restrições, estando diretamente baseado em princípios mais elementares da dinâmica de fluidos (conservação de massa e de *momentum*), o que lhes permite tratar um grupo maior de problemas. O inconveniente destes modelos é sua maior complexidade e custo computacional em comparação com o segundo grupo. No que se refere aos modelos baseados na teoria de propagação de ondas, se encontram os da teoria de raio e da equação para declividades suaves (*mild-slope equation*). Os quais requerem, em geral, a suposição de uma série de hipóteses sobre o fenômeno, algumas das quais podem ser claramente restritivas ou irreais (e.g. relações  $H/L$  ou  $H/h$  pequenas, ondas que se propagam sem mudar de forma, etc.). A contrapartida para estas limitações é a possibilidade de chegar a formulações muito compactas e aplicáveis com um baixo custo computacional.

Em relação às equações de Boussinesq (1872), vale destacar seu bom comportamento para o caso de ondas longas. São obtidas partindo das equações de Navier-Stokes, com valores médios na vertical e assumindo uma variação linear da velocidade vertical desde o fundo até a superfície livre. Entre os inconvenientes que apresentam tais modelos estão seu alto custo computacional e o alcance da sua eficácia, somente para relações  $h/L < 0,20$ . Contudo, se tem conseguido modificações de tais equações (MADSEN *et. al.*, 1991) que permitem ampliar tal classe até  $h/L <$



0,50. Em contrapartida, possuem a vantagem de utilizar a variável tempo, de modo que possam ser utilizadas para o estudo de onda irregular, que é mais representativo da realidade. Além disso, são modelos muito válidos para o estudo da agitação interior e estudos de ressonância em portos. Visto que, além da refração e da difração, permitem avaliar a reflexão das ondas induzidas pelas condições de contorno, assim como a radiação de energia até o exterior do domínio do fluido (*outgoing waves*).

A refração das ondas determinada mediante as técnicas do traçado dos raios utilizando o princípio de Fermat e a equação da conservação da energia ao longo de cada raio, não inclui a difração das ondas e, portanto, torna-se inadequada quando os efeitos da difração são importantes. Na realidade, frequentemente, devido às complexidades da batimetria, os diagramas de raios apresentam múltiplas interseções, o que leva a dificuldades na interpretação, visto que a teoria prevê amplitude de onda infinita nos pontos de interseção.

A difração das ondas ao redor de estruturas simples (SOMMERFELD, 1886), tais como quebra-mares, foi resolvida analiticamente para fundo de profundidade constante. No caso de estruturas cilíndricas, MacCamy e Fuchs (1954) apresentaram a solução para fundo plano horizontal. Essas soluções não fornecem apenas a altura da onda na área abrigada pela estrutura, mas com elas se obtém também a onda refletida por ela. Versões generalizadas destes problemas de difração utilizando técnicas numéricas como o método da função de Green, tem dado lugar a potentes procedimentos de cálculo de forças das ondas sobre estruturas naqueles casos em que a força de arrasto é muito menor do que a de inércia.

Uma prática generalizada para incorporar os efeitos da difração tem sido suspender os da refração naquelas áreas onde a difração é dominante e utilizar a solução analítica de Sommerfeld para fundo plano horizontal. Fora da área de difração predominante são desprezados os efeitos da mesma e só é considerada a refração. Esta metodologia é claramente inexata, mas permite a inclusão da difração de uma maneira aproximada.

Os modelos combinados de refração/difração incluem ambos os efeitos explicitamente e, portanto, permitem a modelagem das ondas naquelas regiões onde a batimetria é irregular e/ou onde os efeitos da difração são importantes. As situações

---

nas quais os raios de onda se cruzam devido às concentrações locais, provocando cáusticos que podem ser tratados adequadamente através desses modelos sem que se estabeleçam amplitudes infinitas.

Os modelos de refração/difração combinada são apropriados para o cálculo das alturas de onda e sua direção naquelas áreas onde estão presentes ambos os fenômenos. Como exemplos, podem ser indicados os casos do cálculo das ondas que penetram em uma baía, ou a proteção produzida por uma ilha próxima da costa.

Nesta seção, é descrito o modelo fracamente não linear de refração – difração combinada, apresentado inicialmente por Kirby e Dalrymple (1983a). Modelo denominado inicialmente de REF/DIF, que se baseia em um desenvolvimento em série de Stokes das equações que definem o problema da propagação de ondas e, inclui uma aproximação até a terceira ordem da velocidade de fase de onda ou celeridade. A amplitude da onda é aproximada até a segunda ordem (LIU; TSAY, 1984). É necessário ressaltar que o modelo não contém todos os termos de terceira ordem de um desenvolvimento de Stokes. O modelo permite determinar o efeito de dadas correntes sobre a propagação das ondas.

A aplicação do modelo teórico a situações práticas inclui o uso de uma aproximação parabólica, o que restringe o uso do modelo aos casos onde a direção de propagação das ondas está dentro de  $\pm 60^\circ$  ao redor de uma direção de propagação dominante. Mediante esta aproximação parabólica obtém-se a amplitude da onda solucionando a equação através de diferenças finitas, o que resulta em um sistema de matrizes tridiagonais que são, do ponto de vista da computação, de aplicação muito rápida.

## 2.2 Modelos de propagação de ondas

### *Equação da declividade suave*

O problema da propagação de ondas sobre batimetria irregular é tridimensional e envolve complicadas condições de contorno não lineares. Por este motivo, existem muito poucas soluções para o problema tridimensional e todas elas são para fundo plano horizontal. Em duas dimensões, os sofisticados modelos de Chu e Mei (1970) e

Djordjevic e Redekopp (1978) prevêm o comportamento de ondas de Stokes sobre batimetria com declividade suave. Para a simplificação do problema tridimensional, Berkhoff (1972), entre outros, notou que a maior parte das propriedades das ondas progressivas lineares poderia ser prevista de antemão através de um modelo ponderado integrado verticalmente.

A equação a que Berkhoff (1972) chegou é conhecida com o nome de “*mild slope equation*”, ou seja, equação da declividade suave. A equação pode ser escrita em função do deslocamento da superfície livre  $(x, y)$  mediante a utilização de um operador de gradiente horizontal como:

$$\vec{\nabla}(cc_g \vec{\nabla}\eta) + \sigma^2 \frac{c_g}{c} \eta = 0 \quad (1)$$

onde:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_j} \quad j = 1, 2$$

$$c = \sqrt{\left(\frac{g}{k}\right) \tan h kh} \quad \text{Celeridade da onda}$$

$$c_g = c \frac{\left(1 + \frac{2kh}{\text{sen } h 2kh}\right)}{2} \quad \text{Celeridade de grupo}$$

onde a profundidade local da água é  $h(x, y)$ , e  $g$ , a aceleração da gravidade. O número de onda local  $k(x, y)$  está relacionado com a frequência angular,  $\sigma$ , e a profundidade,  $h$ , mediante a relação de dispersão linear:

$$\sigma^2 = gk \tan h kh \quad (2)$$

O perfil da onda vem dado por:

$$\eta = A(x, y)e^{i\sigma t} \quad (3)$$

onde,  $A(x, y)$  é a amplitude complexa com informação sobre a fase e a amplitude real da onda.

Berkhoff (1972) foi o primeiro a obter uma equação de propagação para ondas de pequena amplitude em áreas com profundidade levemente variável.

Posteriormente, tal equação foi ampliada para incluir também os efeitos de correntes por Booij (1981) e Kirby (1983). Foram utilizados diferentes métodos matemáticos para obter as equações para a declividade suave. Enquanto que Luke (1967), Booij (1981) e Kirby (1983) utilizaram um princípio variacional, os métodos baseados em perturbações também têm sido empregados por outros autores.

Diversos autores têm aplicado a equação da declividade suave em diversos casos, principalmente utilizando técnicas de diferenças finitas, ver como exemplos Jonsson e Skovgaard (1979), Bettess e Zienkiewicz (1977) e Houston (1981).

Radder (1979) desenvolveu para a equação da declividade suave uma aproximação parabólica que tem várias vantagens sobre a forma elíptica apresentada por Berkhoff (1972). Primeiro não são necessárias as condições de contorno na extremidade inferior do ambiente de integração e, segundo, permite técnicas de resolução bastante eficientes por meio de um modelo de diferenças finitas. Radder (1979) utilizou uma técnica de partição de matrizes, que implica na separação do campo de ondas em uma onda, propagando-se para frente e outra para trás, desprezando posteriormente esta segunda (o que é justificado porque na maioria das aplicações somente tem interesse a onda que é propagada para frente). A aproximação de Radder (1979) para as derivadas transversais na direção normal à direção de propagação impõe uma restrição ao seu modelo parabólico: as ondas devem ser propagadas dentro dos  $\pm 45^\circ$  ao redor da direção principal de propagação. Booij (1981) desenvolveu também um método para a partição da matriz da equação elíptica, mas seu procedimento inclui mais termos na aproximação das derivadas transversais e, portanto, seu método permite ao modelo parabólico manejar ondas dentro da área de  $\pm 60^\circ$  ao redor da direção suposta. Este procedimento de Booij é o que é utilizado no modelo OLUCA-MC.

A aproximação parabólica fracamente não linear à equação da declividade suave é dada por:

$$c_g \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} + i(k_0 - k)c_g A + \frac{\sigma}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{c_g}{\sigma} \right) A - \frac{i}{2\sigma} \frac{\partial}{\partial y} \left[ p \frac{\partial A}{\partial y} \right] - i\sigma k^2 D |A|^2 \frac{A}{2} = 0 \quad (4)$$

onde:

$$p = c c_g$$

$k_0$  = Número de onda de referência, tomado como a média ao longo do eixo  $y$ .

$D$  = Forma parte do termo não linear e é:

$$D = \frac{(\cos h^4 kh + 8 - 2 \tan h^2 kh)}{8 \operatorname{sen} h^4(kh)} \quad (5)$$

• **Modelos combinados de refração/difração**

Os modelos predecessores do OLUCA-MC foram desenvolvidos por Kirby (1983) e Kirby e Dalrymple (1983a), o primeiro mediante uma aproximação Lagrangiana e o segundo mediante uma técnica de escalas múltiplas.

Estes modelos preencheram o espaço entre os modelos não lineares de difração e a equação linear da declividade suave. Tais modelos podem ser escritos de diferentes maneiras dependendo da aplicação. Para aplicações dependentes do tempo é utilizada a forma hiperbólica e para problemas estacionários, a forma elíptica. Ambas necessitam do uso de condições de contorno em todos os lados do domínio do modelo.

Estas condições são difíceis de serem estabelecidas, visto que a reflexão não é conhecida *a priori*. Estes modelos têm, no entanto, a vantagem de não apresentarem restrições em relação à direção das ondas.

Kirby e Dalrymple (1984) mostram uma comparação entre seu modelo fracamente não linear de (1983a) e dados de laboratório. Os testes de laboratório, realizados no *Delft Hydraulics Laboratory* por Berkhoff, Booij e Radder (1982), consistiram na determinação da amplitude das ondas sobre um fundo com declividade. Enquanto os resultados previstos por Berkhoff, Booij e Radder (1982), mediante o traçado dos raios, resultaram ser uma aproximação muito pobre dos testes, a previsão obtida com o modelo de Kirby e Dalrymple (1984) foi excelente.

As comparações entre os modelos parabólicos lineares e não lineares demonstraram a importância dos termos não lineares dispersivos nas equações.

• **Modelos de interação de ondas/correntes**

Utilizando uma aproximação Lagrangiana, Booij (1981) desenvolveu uma versão da equação da declividade suave que inclui os efeitos de uma corrente. Neste modelo, as correntes eram supostamente fracas e qualquer produto entre velocidades de corrente era desprezado. Kirby (1984) apresentou a forma corrigida de seu modelo da equação da declividade suave para incluir correntes. O termo não linear foi adicionado por Kirby e Dalrymple (1983b) que neste artigo apresentaram os resultados de modificação das ondas ao atravessar a corrente. A equação da declividade suave modificada para uma corrente fraca que apresentaram é:

$$(c_g + U)A_x + VA_y + i(k_0 - k)(c_g + U)A + \frac{\sigma}{2} \left[ \left( \frac{c_g + U}{\sigma} \right)_x + \left( \frac{V}{\sigma} \right)_y \right] A - \frac{i}{2\sigma} \left( (p - V^2)A_y \right)_y - \sigma \frac{k^2}{2} D |A|^2 A = 0 \quad (6)$$

onde  $p = c c_g$  e  $k_0 =$  número de onda de referência, tomando como a média do número de onda ao longo do eixo  $y$ ,  $U$  é a velocidade média de corrente na direção da coordenada  $x$  e  $V$  na direção  $y$ . O termo não linear inclui  $D$ , que é:

$$D = \frac{(\cos h 4 kh + 8 \tan h^2 kh)}{8 \operatorname{senh}^4 (kh)}$$

Por último, Kirby e Dalrymple (1985) desenvolveram uma versão não linear do modelo parabólico que inclui correntes fortes, com base em uma formulação Lagrangiana (princípio variacional) descrita por Luke (1967), para um fluido não viscoso e irrotacional com uma superfície livre:

$$\delta \iint_t \vec{x} L d\vec{x} dt = 0; \quad L = \int_{-h}^{\eta} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + gz \right] dz \quad (7)$$

onde  $h$  é a profundidade local e  $\delta = \nabla h / kh$  é um parâmetro adimensional relativo à variação da profundidade em um comprimento de onda.

Utilizando a esbeltez da onda  $\varepsilon = k|A|$ , pode ser demonstrado o potencial de velocidades  $\Phi$  e a superfície livre  $\zeta$  mediante um desenvolvimento em série como:

$$\Phi = \delta^{-1}\Phi_0(\delta x, \delta y, \delta t) + \varepsilon\Phi_1(x, y, z, t) + O(\varepsilon^2) \quad (8)$$

$$\eta = \eta_0(\partial x, \partial y, \partial t) + \varepsilon\eta_1(x, y, t) + O(\varepsilon^2) \quad (9)$$

Assumindo a existência de correntes  $\vec{U} = O(1)$  e com  $\varepsilon \ll 1, \delta \ll 1$  e  $\delta = O(\varepsilon)$ .

Aqui,  $\Phi_0$  é o potencial para a corrente.

$$\vec{U} = \nabla\Phi_0 \quad (10)$$

e  $\Phi_1$  é dado por:

$$\Phi_1 = -\frac{ig}{2\sigma} A f(z)e^{i\theta} + \text{complexo conjugado} \quad (11)$$

Operando do modo descrito em Kirby e Dalrymple (1983b), se chega à equação:

$$\begin{aligned} \frac{D^2\phi}{Dt^2} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \frac{D\phi}{Dt} - \vec{\nabla}(cc_g \vec{\nabla}\phi) + (\sigma^2 - k^2 cc_g)\phi + 2\sigma \left[ \vec{k} \vec{\nabla}\phi_2 - \frac{k^2}{2\sigma \cos h^2 kh} \right] \phi + \\ \sigma^2 k^2 D|A|^2 \phi + i\sigma \frac{\gamma}{2} \phi = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

onde  $\phi$  é o potencial na superfície livre ( $\Phi(x, y, z, t) = \phi(x, y, t)f(z)$ ),  $\sigma^2 k^2 D|A|^2 \phi$  é um termo não linear que representa, de certo modo, a dispersão por amplitude.

$$i\sigma \frac{\gamma}{2} \phi$$

é um termo de dissipação para modelar a dissipação de energia por atrito e por quebra de ondas,  $\phi_2$  é o potencial para uma onda longa, que é regida pela equação:

$$\frac{D^2\phi_2}{Dt^2} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \frac{D\phi_2}{Dt} - g\Delta\vec{\nabla}(h\vec{\nabla}\phi_2 + \vec{U}) = -\frac{gk}{2 \text{ sen } h} \frac{D}{Dt} |A|^2 + \frac{g^2}{2} \vec{\nabla} \left[ \vec{k} \frac{|A|^2}{\sigma} \right] \quad (13)$$

De acordo com Kirby e Dalrymple (1983a), para obter a equação da onda incidente deve ser desprezado o acoplamento que produz a onda longa no potencial  $\phi$ .

Por outro lado, para obter a aproximação parabólica deve-se assumir que a onda se propaga principalmente na direção x, ou seja:

$$\vec{k} \cong (k, 0)$$

E assim, a relação de dispersão resultante:

$$\omega = \sigma + \vec{k} \cdot \vec{U} \cong \sigma + k \cdot U \quad (14)$$

onde  $\omega$  é a frequência absoluta e  $\sigma$ , a frequência intrínseca. A equação da dispersão (2) que relaciona a frequência angular da onda, a profundidade e o número de onda é modificada para levar em conta o efeito Doppler devido à corrente:

$$(\omega - kU)^2 = gk \tan h kh \quad (15)$$

Visto que os processos de refração e difração podem fazer desviar a direção de propagação da direção principal  $x$ , a amplitude da onda  $A$  deve ser uma função complexa para que absorva as diferenças entre a fase real e a presumida.

Se considerar o valor de  $k_0$  e substituir em (11), a nova expressão para o potencial na superfície livre é:

$$\phi = -i \frac{g}{2\sigma} A(x, y) e^{i \int k_0 dx} + \text{complexo conjugado} \quad (16)$$

Na equação (12), desprezando a influência da onda longa e a dependência de  $A$  em relação ao tempo, se chega à seguinte equação parabólica para a amplitude complexa:

$$\begin{aligned} & (c_g + U) \frac{\partial A}{\partial x} + V \frac{\partial A}{\partial y} + i(k_0 - k)(c_g + U)A + \frac{\sigma}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{c_g + U}{\sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{V}{\sigma} \right) \right] A - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[ (cc_g - \right. \\ & \left. V^2) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{A}{\sigma} \right) \right] + \frac{i}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ UV \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{A}{\sigma} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ UV \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{A}{\sigma} \right) \right] \right\} + \frac{1}{4k} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left[ (cc_g - V^2) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{A}{\sigma} \right) \right] + \right. \\ & \left. 2i \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sigma V \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{A}{\sigma} \right) \right] \right\} - \frac{\beta}{4} \left\{ 2i\omega U \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{A}{\sigma} \right) + 2i\sigma V \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{A}{\sigma} \right) - 2UV \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{A}{\sigma} \right) \right\} - \frac{\beta}{4} \frac{\partial}{\partial y} \left[ (cc_g - \right. \\ & \left. V^2) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{A}{\sigma} \right) \right] + \frac{i}{4k} \left[ \frac{\partial}{\partial y} (\omega V) + 3 \frac{\partial}{\partial x} (\omega U) \right] \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{A}{\sigma} \right) + \frac{\gamma A}{2} + \frac{i\sigma}{2} G(|A|, kh)A = 0 \quad (17) \end{aligned}$$

sendo:

$$\beta = \frac{1}{k^2} \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{1}{2k^2(cc_g - U^2)} \frac{\partial}{\partial x} [k(cc_g - U^2)]$$

E onde  $A = A(x, y)$  é a função complexa da amplitude da onda,  $G(|A|, kh)$  é uma função não linear com a amplitude,  $\vec{U} = (U, V)$  é o vetor velocidade da corrente,  $\omega$  é a frequência angular absoluta,  $\sigma$  é a frequência angular intrínseca,  $c$  é a celeridade de



---

fase ou da onda,  $c_g$  é a celeridade de grupo,  $k$  é o número de onda e  $k_0$  é o número de onda de referência média ao longo do eixo  $y$ .

Esta equação é a discretizada no modelo monocromático OLUCA-MC. O desenvolvimento e as operações que são exigidas para chegar até ela são muito extensas e não é apropriado descrevê-las detalhadamente. Tal desenvolvimento pode ser encontrado nas referências: Kirby e Dalrymple (1985) e Kirby (1986a).

### 2.3 Dispersão das ondas devido à amplitude

Desde que foram apresentados os primeiros modelos de refração e difração combinados, continua-se pesquisando o desenvolvimento desses modelos originais, baseados na teoria linear, para que deem resposta a vários fenômenos físicos reais não cobertos, no entanto, por tal teoria. Entre os fenômenos que são de particular importância, destaca-se a não linearidade das ondas, que provoca um aumento da celeridade por efeito da dispersão devido à amplitude, e não somente devido à frequência, como ocorre em ondas lineares. Foi demonstrado por Kirby e Dalrymple (1983a; 1984) que a consideração de fenômenos não lineares pode provocar uma clara distorção dos resultados a partir de uns poucos comprimentos de onda.

Para representar a não linearidade nos modelos de propagação são utilizadas duas aproximações. A primeira aproximação, sugerida inicialmente por Booij (1981), consiste em utilizar uma relação de dispersão empírica que modele a dispersão pela amplitude em águas rasas e que tenha a relação de dispersão frequencial em águas profundas. Esta técnica tem a vantagem de ter, pelo menos, uma descrição empírica do comportamento em águas rasas, mas tem o inconveniente de linearizar os resultados em águas profundas.

A segunda consiste em modificar o modelo linear de Kirby e Dalrymple (1983a), incluindo um termo proporcional ao cubo da amplitude da onda que representa a distorção do número de onda resultante dos efeitos de terceira ordem na teoria de Stokes. Esta aproximação apresenta a vantagem de ter uma base analítica válida, mas tem o claro inconveniente de não ser adequada para águas pouco profundas.

**Relação de dispersão empírica**

A teoria de Stokes para águas profundas e intermediárias oferece a seguinte relação de dispersão:

$$\sigma^2 = gk(1 + \varepsilon^2 D) \tan h(kh) \quad (18)$$

onde:

$$\varepsilon = k|A| \text{ e } D = \frac{\cosh(4kh) + 8 - 2 \tan h^2(kh)}{8 \operatorname{sen} h^4(kh)} \quad (19)$$

Esta formulação é válida para números de Ursell  $Ur < O(1)$  com  $Ur$  definido como:

$$Ur \equiv \frac{|A|}{h} \frac{1}{(kh)^2}$$

Tal restrição não é cumprida em águas rasas, onde  $kh \rightarrow 0$  com  $|A|/h$  pequeno, mas finito. Além disso, a singularidade em  $D$  é muito grande e invalida os resultados em águas pouco profundas:

$$kh \rightarrow 0 \text{ , } D \approx \frac{9}{8} \frac{1}{(kh)^4}$$

Em águas pouco profundas, Hedges (1976) propôs uma modificação da relação de dispersão linear para modelar a dispersão por amplitude:

$$\sigma^2 = gk \tan h [k(h + |A|)] \quad (20)$$

Que em águas pouco profundas e para  $|A|/h$  pequeno, tende a:

$$\sigma^2 = gk^2(h + |A|)$$

Ou, o que é equivalente a:

$$c = \sqrt{g(h + |A|)}$$

Que representa a velocidade de propagação de uma onda solitária de altura  $H=|A|$ . Em águas profundas, a relação de Hedges (1976) tende à relação linear (2), já que  $|A|/h \rightarrow 0$  devido ao aumento da profundidade.

A não adequação de uma relação de dispersão empírica em águas rasas para modelar efeitos não lineares em águas intermediárias, somada à incapacidade da teoria de Stokes em águas pouco profundas, levou Kirby & Dalrymple (1986a) a buscar uma relação de dispersão que fosse capaz de prever a celeridade da onda desde águas profundas até águas rasas. Com a finalidade de incorporá-la em modelos de propagação de ondas, propuseram a seguinte relação de dispersão:

$$\sigma^2 = gk(1 + f_1 \varepsilon^2 D) + \tan h(kh + f_2 \varepsilon) \quad (21)$$

onde  $f_1 = f_1(kh)$  e  $f_2 = f_2(kh)$  são duas funções arbitrárias e  $\varepsilon$  e  $D$  estão definidos como em (19).

O modelo apresentado é construído escolhendo expressões adequadas para as funções  $f_1$  e  $f_2$ . Em particular é necessário que:

$$f_1(kh) \rightarrow 0 \text{ e } f_2(kh) \rightarrow 0 \text{ quando } kh \rightarrow \infty$$

para recuperar a expressão do modelo de Stokes em águas profundas e intermediárias, enquanto que em águas rasas é necessário que:

$$f_1(kh) = O[(kh)^5] \text{ e } f_2(kh) \rightarrow 1 \text{ quando } kh \rightarrow 0$$

para evitar a singularidade em  $D$ , de ordem  $O[(kh)^{-4}]$ .

Por outro lado, a expressão de Hedges (1976) é obtida fazendo  $f_1 = 0$  e  $f_2 = 1$  para qualquer valor de  $kh$ .

Com base nas exigências anteriores, Kirby e Dalrymple (1986a) escolheram os valores de  $f_1$  e  $f_2$  como:

$$f_1(kh) \tan h^5(kh) \quad (22)$$

$$f_2(kh) = \left[ \frac{kh}{\text{sen } h(kh)} \right]^4 \quad (23)$$

Como pode ser visto na Figura 1, a relação proposta concorda adequadamente com ambas as relações; a de Stokes em águas profundas e a de Hedges (1976), em águas rasas. Na figura foi demonstrada a variação da relação de dispersão  $\sigma^2/gk$  em função de  $kh$  para diferentes valores de  $\epsilon$ :

$$\frac{\sigma^2}{gk} = \frac{\sigma/k}{g/\sigma} = \frac{c}{c_0}$$

onde  $c$  é a velocidade da onda e  $c_0$  é a velocidade em águas profundas.

As relações de dispersão consideradas são:

$$\frac{c}{c_0} = \tan h(kh) \quad \text{Linear}$$

$$\frac{c}{c_0} = (1 + \epsilon^2 D) \tan h(kh) \quad \text{Stokes}$$

$$\frac{c}{c_0} = \tan h(kh + \epsilon) \quad \text{Hedges}$$

$$\frac{c}{c_0} = (1 + f_1 \epsilon^2 D) \tan h(kh + f_2 \epsilon) \quad \text{Kirby e Dalrymple (1986)}$$

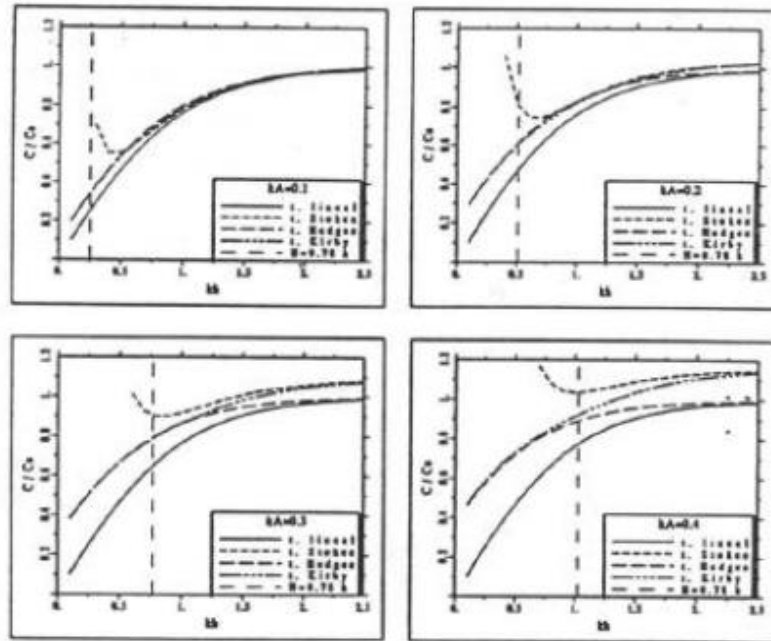


Figura 1 – Variação das relações de dispersão lineares e não lineares com  $kh$  e esbeltez da onda  $\epsilon$  (KIRBY; DALRYMPLE, 1986 a).

Como resultado das diferentes relações de dispersão possíveis, existem três opções no OLUCA-MC: (1) modelo linear, (2) um modelo Stokes-Hedges não linear, e (3) um modelo Stokes. Destas opções, a (2) cobre uma área maior de profundidades de água e alturas de onda em relação às demais.

• **Modificação do modelo linear, incluindo um termo em  $|A^2|A$**

As equações parabólicas de Booij (1981) e Radder (1979) são equações baseadas na equação linear de Berkhoff (1972) e, como tais, não são capazes de reproduzir efeitos não lineares dependentes da amplitude de onda. Os modelos lineares tendem, em geral, a calcular a mais, as amplitudes de onda nas proximidades das zonas de concentração de ondas e a formação de cáusticos, onde a esbeltez aumenta rapidamente e os efeitos não lineares são importantes. Esta tendência pode ser observada na verificação realizada por Berkhoff, Booij e Radder (1982).

Por esta razão, Kirby e Dalrymple (1983a) derivaram a equação parabólica para a propagação de ondas fracamente não lineares (“*weakly-nonlinear waves*”) utilizando um método de perturbação multiescalar. O desenvolvimento formal, que pode ser encontrado em Kirby e Dalrymple (1983a) utiliza um desenvolvimento do tipo WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin) para o potencial de onda no contexto da teoria de Stokes, muito similar ao utilizado por Yue e Mei (1980) para o caso de profundidade constante.

A aproximação parabólica que obtiveram para a amplitude foi:

$$2ikcc_g \frac{\partial A}{\partial x} + 2k(k - k_0)cc_g A + i \frac{\partial(kcc_g)}{\partial x} A + \frac{\partial}{\partial y} cc_g \frac{\partial A}{\partial y} - kcc_g K' |A|^2 A = 0 \quad (24)$$

Com  $K' = k^3 c / c_g D$ ,  $D$  definido como em (19) e  $A$  uma função complexa da amplitude. Esta equação é igual à de Radder (1979) (substituindo  $\phi = i \frac{g}{\sigma} A e^{ik_0 x}$ ), exceto pelo termo não linear  $-kcc_g K' |A|^2 A$ .

A aproximação realizada para incluir a não linearidade, utilizada no modelo OLUCA-MC, foi objeto de uma verificação posterior e seus resultados foram amplamente satisfatórios (KIRBY; DALRYMPLE, 1984). Um inconveniente que deve ser considerado é que em águas pouco profundas a aproximação de Stokes de ordem superior a 1 não é utilizável, já que o termo  $D$  não converge, independentemente de sua falta de validade sob o ponto de vista físico. No entanto, esta limitação é parcialmente solucionada com a relação de dispersão empírica acima mencionada.

## 2.4 Modelagem da dissipação de energia

Em muitos casos, a simulação realista da propagação de ondas requer a inclusão de efeitos de dissipação de energia, que apresentam uma leve não linearidade. A presença localizada de dissipação de energia no fundo ou em algum ponto da coluna de água provoca a difração das ondas, assim como sua atenuação.

A inclusão de um termo de dissipação de energia em uma equação de propagação foi estudada por Skovgaard, Jonsson e Bertelsen (1975), que apresentaram um modelo de dissipação por atrito de fundo. Seguindo esta ideia, Booij (1981) e, posteriormente, Dalrymple, Kirby e Hwang (1984) desenvolveram modelos parabólicos incluindo tal termo de dissipação.

Dalrymple, Kirby e Hwang (1984), seguindo o método utilizado por Booij (1981), introduziram um fator de dissipação  $\gamma$  na equação de Berkhoff (1972):

$$\vec{\nabla}(cc_g \vec{\nabla}\phi) + (k^2 cc_g + i\sigma\gamma)\phi = 0 \quad (25)$$

Seguindo o raciocínio para a obtenção da equação parabólica de Radder (1979), separando as componentes incidentes e refletivas, chega-se a uma equação parabólica com o termo de dissipação semelhante ao de (17):

$$+ \frac{\gamma}{2} A$$

onde  $\gamma$  é a dissipação da energia dividida pela energia e sua unidade é tempo<sup>-1</sup>, que adota diferentes expressões dependendo da origem da dissipação de energia, incluída a quebra das ondas:

- **Camada limite laminar na superfície e no fundo**

Na superfície livre da água e no fundo são formadas camadas limites devido à ação da viscosidade. Nas superfícies contaminadas (com origem natural ou não), onde é formada uma película superficial, ocorre um importante amortecimento de ondas. Este amortecimento depende do valor da viscosidade do fluido e seu valor é segundo Phillips (1966):

$$\gamma = \gamma_s + \gamma_f = \frac{\sigma k \sqrt{\frac{\nu}{2\sigma}}(1-i)}{\tan h(kh)} + \frac{2\sigma k \sqrt{\frac{\nu}{2\sigma}}(1-i)}{\sen h(kh)} = \frac{2\sigma k \sqrt{\frac{\nu}{2\sigma}}(1+\cos h^2(kh))}{\sen h(2kh)}(1-i) \quad (26)$$

onde  $\nu = 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  é a viscosidade cinemática e  $\nu/2\sigma$  representa a espessura da camada limite.

- **Camada limite turbulenta no fundo**

No campo, as condições de ondas são tais que a camada limite no fundo é sempre turbulenta. Neste caso, a dissipação de energia pode ser obtida utilizando o coeficiente de atrito de Darcy-Weisbach,  $f$ . Dean e Dalrymple (1984) demonstraram que a dissipação de energia para esta camada limite é dada pela expressão:

$$\gamma = \frac{2\sigma f k |A| (1-i)}{3\pi \operatorname{sen} h (2kh) \operatorname{sen} h (kh)} \quad (27)$$

com  $f=4f_\omega$ , onde  $f_\omega = 0,01$  ( $f_\omega$  é o coeficiente de Darcy-Weisbach para ondas).

- **Fundos porosos de areia**

A maioria dos fundos é porosa e as ondas induzem um fluxo no interior do leito. O resultado é um amortecimento devido ao fluxo de Darcy na areia. Para leitos caracterizados por um coeficiente de permeabilidade dado,  $C_p$ , pode ser demonstrado que o amortecimento é determinado por:

$$\gamma = \frac{gkC_p(1-i)}{\cos h^2(kh)} \quad (28)$$

O coeficiente de permeabilidade,  $C_p$ , tem unidade ( $m^2$ ) e é da ordem de  $4,5 \cdot 10^{-11} m^2$ . Liu e Dalrymple (1984) demonstraram que para areias muito permeáveis, o amortecimento está em relação inversa a  $C_p$  e que, portanto, deve ser utilizada uma expressão diferente para  $\gamma$ . No entanto, este caso não costuma acontecer na natureza.

- **Quebra**

Sem dúvida, a quebra das ondas é um dos fenômenos mais significativos da hidrodinâmica costeira já que afeta diferentes processos costeiros naturais, tais como as correntes costeiras e o transporte de sedimentos. A quebra da onda ocorre principalmente na zona de surfe devido à redução da profundidade; também podendo ocorrer em águas mais profundas através da esbeltez da onda e é um fenômeno altamente não linear e dissipativo.

A análise da quebra da onda é fundamental para um modelo de propagação em áreas costeiras e deve servir para determinar a perda de energia sofrida, assim como a altura de onda e profundidade onde quebra a onda.

Em geral, os modelos de propagação de ondas em quebra podem ser classificados em três categorias (MASSEL, 1989):

- Modelos que limitam a altura da onda;



- Modelos de propagação de ondas bruscas; e
- Modelos que determinam a variação espacial da energia das ondas ou da “*wave action*”.

O modelo OLUCA-MC utiliza um modelo do último tipo, desenvolvido por Dally, Dean e Dalrymple (1985) e que é baseado em achar uma relação com o coeficiente de dissipação apresentado no item anterior.

Tal modelo não somente pretende descrever a quebra, mas também o processo de recomposição das ondas, fato observável na natureza. A equação que governa o balanço energético estacionário das ondas avançando até a costa é:

$$\frac{\partial}{\partial x}(E c_g) = -\delta(x) \quad (29)$$

onde  $E$  é a energia da onda por unidade de superfície,  $c_g$  é a celeridade de grupo e  $\delta(x)$  é a taxa de dissipação de energia por unidade de área.

Dally, Dean e Dalrymple (1985) consideraram no perfil da Figura 2 uma onda que, propagando-se a partir de águas profundas ao longo de uma declividade, inicia a quebra no ponto onde o perfil começa a ser horizontal. A quebra continua até que a onda alcança uma altura de onda estável, o qual foi comprovado com dados de laboratório por Horikawa e Kuo (1966). A função é proporcional ao excesso de fluxo de energia com relação a um valor estável, sendo este:

$$\frac{\partial}{\partial x}(E c_g) = -\frac{K}{h'} [E c_g - (E c_g)_e] \quad (30)$$

onde  $E c_g$  é o fluxo de energia integrado verticalmente e calculado no tempo, dado pela teoria linear em águas pouco profundas;  $K$  é um coeficiente adimensional de decaimento,  $h'$  é a profundidade no fundo horizontal e  $(E c_g)_e$  é o fluxo de energia associado à onda estável.

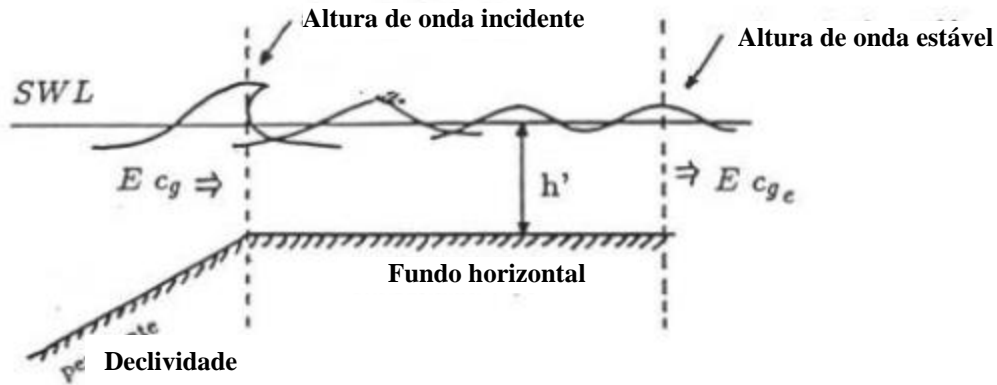


Figura 2 – Visualização do fundo na zona de surfe para o modelo de dissipação por quebra (DALLY; DEAN; DALRYMPLE,1985).

Horikawa e Kuo (1966) realizaram testes em laboratório para um perfil como o da Figura 2 e obtiveram uma relação para a altura de onda estável, tal como:

$$H_e = \Gamma h' \quad \text{com} \quad \Gamma = 0,35 - 0,40$$

Substituindo  $E = \frac{1}{8} \rho g H^2$ ,  $c_g = (gh')^{1/2}$  e  $H = \Gamma h'$  em (30) resulta:

$$\frac{\partial [H^2 (h')^{1/2}]}{\partial x} = -\frac{K}{h'} \left[ H^2 (h')^{1/2} - \Gamma^2 (h')^{5/2} \right] \quad (31)$$

Que pode ser escrita como uma equação diferencial do tipo:

$$\frac{\partial G(x)}{\partial x} + P(x)G(x) = Q(x)$$

Com  $G(x) = H^2 (h')^{1/2}$ ,  $P(x) = K/h'$  e  $Q(x) = K\Gamma^2 (h')^{3/2}$  cuja solução geral é:

$$G \cdot e^{\int P dx} = \int [Q \cdot e^{\int P dx}] dx + C$$

E a partir da qual podem ser obtidas soluções analíticas simplesmente tomando perfis teóricos idealizados, tais como:

- profundidade constante:  $h'(x) = \text{const} = h'$
- declividade suave:  $h'(x) = h_b' - mx$

- perfil de equilíbrio de Dean:  $h'(x)=A(L-x)^{2/3}$

E impondo a condição de contorno  $G(x = 0) = H_b^2 (h'_b)^{1/2}$ , ou seja, que exista quebra em  $x = 0$ .

O modelo foi calibrado a partir dos testes de Horikawa e Kuo (1966), com cerca de 750 dados, obtendo os valores ótimos de  $\Gamma$  e  $K$  pelo método dos mínimos quadrados. As declividades testadas foram de 1/30, 1/65 e 1/80, com períodos de 1,2 a 2,3 segundos e alturas de onda de 7 a 27 cm.

Os valores ótimos obtidos variavam com a declividade, principalmente quando esta declividade estava mais inclinada. No entanto, é melhor escolher um só par de valores ( $\Gamma$ ,  $K$ ) que dêem resultados satisfatórios para todas as declividades. Felizmente, as superfícies “função de erro” para as três declividades eram relativamente largas e planas próximo aos valores mínimos. Por isso, foram aceitas as três declividade e se buscou o ponto ( $\Gamma$ ,  $K$ ) onde a soma dos erros foi mínima, resultando em  $\Gamma = 0,40$  e  $K = 0,15$  (erro médio = 0,1423). Se a declividade varia muito será melhor utilizar os valores médios  $\Gamma = 0,40$  e  $K = 0,15$ , mas se a praia tiver só uma declividade será possível usar os seguintes valores (Quadro 1).

Quadro 1 – Valores de  $\Gamma$ ,  $K$  e erro para diferentes declividades.

Declividade	$\Gamma$	K	Erro mínimo
1/80	0,350	0,100	0,1298
1/65	0,355	0,115	0,1054
1/30	0,475	0,275	0,1165

Kirby e Dalrymple (1986b) adaptaram este modelo de quebra para a aproximação parabólica que incluía o termo de dissipação de energia desenvolvido por Dalrymple, Kirby e Hwang (1984). Para isso, Kirby e Dalrymple (1986b) assumiram que a equação da energia (30) poderia ser escrita da forma:

$$\frac{\partial}{\partial x}(Ec_g) = -WE \quad (32)$$

Onde:

$$W = \frac{Kc_g}{h} \left(1 - \frac{E_e}{E}\right) = \frac{Kc_g}{h} \left(1 - \left(\frac{\Gamma h}{2|A|}\right)^2\right)$$

e onde  $\gamma = W$  é o fator de dissipação por quebra incluído na equação discretizada no modelo OLUCA-MC:

$$\gamma = \frac{Kc_g}{h} \left(1 - \left(\frac{\Gamma h}{2|A|}\right)^2\right) \quad (33)$$

com  $K = 0,15$  e  $\Gamma = 0,40$ . O critério de início de quebra utilizado é o de Mc Cowan, que é definido como:

$$H_b \geq 0,78h_b \quad (34)$$

Desta forma se  $H_b > 0,78h_b$  é iniciada a quebra e  $\gamma$  é obtido a partir da equação (33). A quebra continua até  $H < \Gamma h$  e a partir daí,  $\gamma = 0$  e a onda regenerada prossegue seu avanço.

### • Áreas de terra

As grandes ilhas que cortam a superfície livre e as costas que possam ter áreas de quebra são tratadas mediante a técnica da “*thin film* (película fina)” de Dalrymple, Kirby e Mann (1984). Este procedimento permite o cálculo simples das alturas de onda ao redor de ilhas de forma arbitrária, substituindo as ilhas por baixios extremamente rasos (1 mm). A rotina de quebra reduz as alturas de onda sobre o baixio para menos de um milímetro, de maneira que a energia que passa por cima do baixio seja insignificante. Desta forma, o OLUCA-MC não distingue, do ponto de vista computacional, as ilhas das áreas de maior profundidade, obtendo-se contudo, como resultado, a influência da ilha sobre a onda. Alguns exemplos de quebra de ondas obtidos com o modelo podem ser observados em Dalrymple *et. al.* (1984) e em Kirby e Dalrymple (1986b).

## 2.5 Modelagem das ondas

- **Ondas monocromáticas**

Embora o OLUCA-MC seja tipicamente aplicado com trens de ondas monocromáticas, não há restrição inerente a este caso. Como um exemplo, para uma dada frequência, a direção da onda é determinada pela distribuição da altura da onda inicial imposta pelo usuário sobre o contorno *offshore* da malha, correspondendo a  $x = 0$ . Como este contorno é paralelo ao eixo, a onda é geralmente definida por:

$$A(0, y) = A_0 e^{iby} \quad (35)$$

onde  $A_0$  é a amplitude dada e  $b$ , o número de onda na direção  $y$ .  $b$  está relacionada com o número de onda  $k$  pela relação  $b = k \sin \alpha$ , onde  $\alpha$  é o ângulo que forma a onda com o eixo  $x$ .

- **Ondas direcionais discretas.**

Para o caso de várias ondas com diferentes direções e amplitudes e com uma só frequência dada, pode ser utilizada a seguinte expressão para a condição inicial:

$$A(0, y) = \sum_{n=1}^{NWAVS} A_n e^{(i l_n y)} \quad , n = 1, 2, 3, \dots \quad (36)$$

O modelo OLUCA-MC está preparado para calcular o campo de ondas produzido por esta condição de contorno para um grande número de  $A_n$  e  $\alpha_n$  (até 50).

## 2.6 Hipóteses do modelo parabólico

### 1. Fluido

- Não viscoso
- Incompressível
- Densidade constante

---

## 2. Fluxo

- Irrotacional
- Estacionário

## 3. Dinâmicas

- Pressão constante na superfície livre
- Não é considerada a ação do vento
- Não é considerada a ação de Coriolis

## 4. Contornos

- Fundo de declividade suave:

O desenvolvimento matemático das equações do modelo é apresentado com a hipótese de que as variações do fundo com as coordenadas horizontais são pequenas em comparação com o comprimento de onda. Para o modelo linear, Booij (1983) realizou uma comparação entre um modelo numérico exato e o da equação da declividade suave para ondas, propagando-se sobre uma praia. Encontrou que até declividades do fundo de 1:3 o modelo da declividade suave é exato e que, para declividades maiores, prevê adequadamente as tendências.

## 5. Propagação

- Não linearidade fraca:

Fraca dependência da equação de dispersão com a amplitude de onda; modelo não linear Stokes-Hedges.

- Aproximação parabólica:

As ondas se propagam principalmente em uma direção ( $x$ ). Com o qual se desprezam termos  $(\partial^2(\cdot)/\partial x^2)$ . A solução será tanto mais aproximada quanto menor for a variação na direção  $x$ .

Esta aproximação parabólica implica em várias vantagens e desvantagens:

**Vantagens:** (1) foi demonstrado uma equação governante correta para a propagação de componentes lineares sobre fundos de declividades suaves na presença de correntes; (2) é uma equação do tipo parabólica e, como tal, não requer condições em todo o contorno, basta apenas uma condição inicial no contorno a partir do qual ela será propagada, e condições nos contornos laterais. Além disso, é uma ferramenta muito útil para reduzir o esforço e o tempo de computação, pois podem ser utilizados esquemas implícitos de seis pontos como o de Crank-Nicholson e obter soluções rápidas e estáveis.

**Desvantagens:** (1) limitação do ângulo de propagação das ondas a  $\pm 60^\circ$  em relação ao eixo principal,  $x$ ; (2) é desprezado o efeito das ondas refletivas; e (3), portanto, as soluções serão mais aproximadas quanto menor for a variação com relação a essa direção principal. A segunda desvantagem não é tão importante na prática, pois na propagação de ondas até a costa interessam, principalmente, os efeitos da refração e difração.

Lee e Wang (1992) compararam cinco modelos de propagação, todos eles baseados na equação para declividades suaves: dois modelos são do tipo hiperbólico, dois do tipo elíptico e um do tipo parabólico. Os parâmetros que são avaliados no citado trabalho são a exatidão dos resultados, o grau de dificuldade computacional e sua aplicabilidade prática em função da facilidade para simular os diferentes fenômenos que têm lugar durante a propagação das ondas. As vantagens do modelo parabólico são as já comentadas: facilidade de programação, estabilidade numérica e economia de tempo computacional; e seus inconvenientes são a impossibilidade de simular a reflexão das ondas e uma menor precisão de seus resultados. Vale destacar, como dado de referência que não deve ser extrapolado para outros testes, que ao analisar o experimento de Ito e Tanimoto (1972) sob condições idênticas para os cinco modelos, o modelo parabólico, que utilizou aproximadamente 20 segundos de CPU, consumiu 20 vezes menos tempo que um dos modelos elípticos e em torno de 50 vezes menos tempo de CPU que os modelos hiperbólicos, sendo que os resultados apresentaram o mesmo grau de precisão para os cinco modelos.

**CAPÍTULO 3: FORMULAÇÃO NUMÉRICA DO  
PROBLEMA**

---



---

### 3. Formulação Numérica do Problema

#### 3.1 Introdução

No presente capítulo é descrita a resolução numérica do problema, cujas equações têm sido obtidas no capítulo anterior. Na segunda seção são descritas as equações que serão discretizadas, detalhando cada uma das variáveis que aparecem. Na terceira seção é descrita a implementação do modelo de propagação em um algoritmo numérico, com atenção especial na geração da malha, a discretização das equações e as condições de contorno. Nas seções seguintes são mostrados alguns desenvolvimentos utilizados para resolver certas particularidades do modelo, como a não linearidade na seção 8, o algoritmo de quebra, na seção 9, os contornos no interior do domínio na seção 10 e o ruído numérico gerado pela descontinuidade que introduz o algoritmo de quebra na seção 11.

#### 3.2 Equações a discretizar

A equação utilizada neste modelo para modelar a propagação das ondas considera os fenômenos de:

- (1) Empinamento
- (2) Refração por fundo
- (3) Difração
- (4) Presença de correntes
- (5) Dissipação de energia
- (6) Quebra, e
- (7) Dispersão por amplitude

E é a seguinte:

$$\begin{aligned}
 & (c_g + U) \frac{\partial A}{\partial x} + V \frac{\partial A}{\partial x} + i(k_0 - k)(c_g + U)A + \frac{\sigma}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{c_g + U}{\sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{V}{\sigma} \right) \right] A - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[ (cc_g - \right. \\
 & \left. V^2) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{A}{\sigma} \right) \right] + \frac{i}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ UV \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{A}{\sigma} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ UV \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{A}{\sigma} \right) \right] \right\} + \frac{1}{4k} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left[ (cc_g - V^2) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{A}{\sigma} \right) \right] + \right. \\
 & \left. 2i \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sigma V \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{A}{\sigma} \right) \right] \right\} - \frac{\beta}{4} \frac{\partial}{\partial y} \left[ (cc_g - V^2) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{A}{\sigma} \right) \right] + \frac{i}{4k} \left[ \frac{\partial}{\partial y} (\omega V) + 3 \frac{\partial}{\partial x} (\omega U) \right] \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{A}{\sigma} \right) + \frac{\gamma A}{2} + \\
 & \frac{i\sigma}{2} G(|A|, kh) A = 0 \quad (37)
 \end{aligned}$$

Sendo:

$$\beta = \frac{1}{k^2} \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{1}{2k^2(cc_g - U^2)} \frac{\partial}{\partial x} [k(cc_g - U^2)]$$

A função  $G(|A|, kh)$  do termo não linear é:

$$G(|A|, kh) = \begin{cases} 0 & \text{Teoria Linear} \\ k^2 D |A|^2 & \text{Teoria de Stokes} \\ (1 + f_1 K^2 |A|^2 D) \frac{\tanh(kh + f_2 k |A|)}{\tanh(kh)} - 1 & \text{Modelo Composto} \end{cases}$$

Com:

$$D = \frac{\cosh(4kh) + 8 - 2 \tanh^2(kh)}{8 \operatorname{sen}^4(kh)}$$

$$f_1(kh) = \tanh^5(kh)$$

$$f_2(kh) = \left[ \frac{kh}{\operatorname{sen} h(kh)} \right]^4$$

O fator  $\gamma$  de dissipação de energia da onda é:

$$\gamma = \begin{cases} \frac{2\sigma k \sqrt{\frac{\nu}{2\sigma}} (1 + \cosh^2(kh))}{\operatorname{sen} h(2kh)} (1 - i) & \text{Para camada limite laminar} \\ \frac{2\sigma f k |A|}{3\pi \operatorname{sen} h(2kh) \operatorname{sen} h(kh)} (1 - i) & \text{Para camada limite turbulento no fundo} \\ \frac{g k C_p}{\cos^2 h^2(kh)} (1 - i) & \text{Para fundo poroso} \\ \frac{K c_g}{h} \left( 1 - \left( \frac{\Gamma h}{2|A|} \right)^2 \right) & \text{Para quebra} \end{cases}$$

Com:

$$\nu = 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \quad \rightarrow \text{viscosidade cinemática}$$

$$f = 4f_{\bar{u}} \quad \rightarrow \text{coeficiente de atrito da onda}$$

$$f_{\bar{u}} = 0,01 \quad \rightarrow \text{coeficiente de Darcy-Weisbach}$$

$$C_p = 4,5 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2 \quad \rightarrow \text{coeficiente de permeabilidade}$$

$$K = 0,15 \quad \rightarrow \text{parâmetro do modelo de dissipação por quebra}$$

$$\Gamma = 0,40 \quad \rightarrow \text{parâmetro do modelo de dissipação por quebra}$$

As variáveis definidas da equação utilizada são:

-  $A = A(x, y)$ , função complexa da amplitude da onda.

-  $h = h(x, y)$ , profundidade

-  $\vec{U} = (U, V)$ , vetor velocidade da corrente.

-  $T$ , período de onda.

-  $\dot{u}$ , frequência angular absoluta.

-  $\acute{o}$ , frequência angular intrínseca.

-  $c$ , celeridade de fase ou da onda.

-  $c_g$ , celeridade de grupo.

-  $k$ , número de onda local.

-  $k_0$ , número de onda média em  $y$ .

Algumas relações entre as variáveis definidas são:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\sigma = \sqrt{gk \tanh(kh)}$$

$$\sigma = \omega - kU$$

$$c = \frac{\sigma}{k}$$

$$c_g = \frac{\partial \sigma}{\partial k}$$

### 3.3 Discretização do domínio

Para a aplicação do modelo para um caso geral de propagação de ondas, as equações apresentadas no item anterior são resolvidas pelo método de diferenças finitas sobre uma malha retangular.

A resolução numérica das equações necessita transformar o domínio contínuo em um domínio discreto, formado por uma malha mais ou menos densa de pontos ou nós, onde são definidas cada uma das variáveis envolvidas no problema.

A terminologia usada para uma malha de referência é mostrada na Figura 3. Tal malha está formada por uma rede retangular de pontos de dimensões  $MR \times NR$  em  $X$  e  $Y$ . O eixo  $X$  tem aproximadamente a direção da propagação das ondas, desde o mar até a linha de costa, sendo o eixo  $Y$  perpendicular a ele. Em cada um dos pontos ou nós são definidos os dados de entrada, a profundidade  $h$  e as componentes  $U$  e  $V$  da velocidade da corrente, assim como os valores da amplitude complexa  $A$ .

Assume-se que o sistema de coordenadas  $X$ - $Y$  tem origem no ponto  $(IR, JR) = (1, 1)$ . Os nós estão separados por uma distância  $DXR$  e  $DYR$  uniforme nas direções  $X$  e  $Y$ , respectivamente. Para uma melhor descrição do domínio é feita a distinção entre a linha  $IR$ , que é a linha de pontos  $JR = 1, NR$ , e o bloco  $IR$ , que é o espaço físico entre as linhas  $IR$  e  $IR + 1$ . O conjunto de pontos  $IR = 1, MR$  com  $JR$  fixo é denominado coluna.

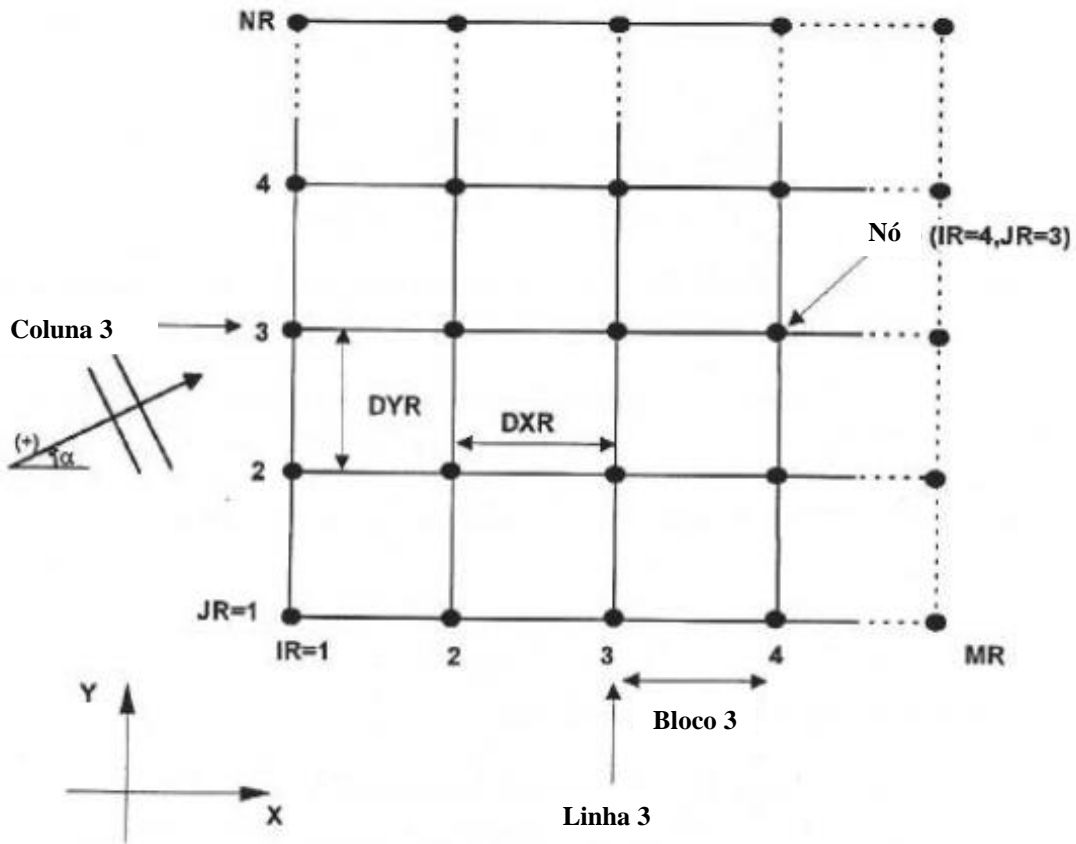


Figura 3 – Malha de referência.

O domínio retangular para uma aplicação qualquer deve ser escolhido com precaução.

O comprimento na direção de propagação pode ser modificado variando os parâmetros do código fonte, mas estará limitado pelo custo computacional e de capacidade de memória, já que o modelo internamente utiliza uma malha com 10 subdivisões por comprimento de onda. O comprimento na direção Y deve ser escolhido de modo que as interferências provocadas pelos contornos não afetem a área de interesse, principalmente quando são utilizados contornos refletivos.

Uma característica interessante do código é a possibilidade de *subdividir* os espaçamentos em ambas as direções e obter assim uma malha mais finamente discretizada e densa. Geralmente, é feito em casos onde os espaçamentos são muito

grandes ou quando existem características batimétricas especiais que sugerem uma resolução mais precisa da malha. Além disso, a subdivisão pode ser realizada unicamente na área de interesse do domínio não sendo necessário subdividir o domínio completo.

A subdivisão  $ND$  na direção  $Y$  é especificada pelo usuário e aplicada uniformemente ao longo de cada linha. Em troca, a subdivisão  $MD(IR)$  na direção de propagação, variável em cada bloco, pode ser designada ao usuário ou deixar que seja determinada pelo próprio programa. Nesse caso, o código calcula um fator de número de onda média ( $k_0$ ) em cada linha inicial de um bloco e escolhe  $MD(IR)$  de forma que tenha pelo menos 10 pontos por comprimento de onda no bloco  $IR$ . O usuário também pode determinar o valor de  $MD(IR)$  em cada bloco para poder descrever melhor a batimetria em algumas áreas. Na Figura 4 é apresentado um exemplo de subdivisão da malha.

Os limites das subdivisões para o código do modelo OLUCA-MC são:

$$DIVX = 60, \quad DIVY = 5000$$

Onde  $DIVX$  são as subdivisões máximas em  $X$ , para um só bloco  $IR$ , e  $DIVY$  são as subdivisões máximas *de todos os blocos em  $y$* .

Uma vez que seja subdividida a malha, o código numérico utiliza esta nova malha como seu domínio de cálculo. Os valores da profundidade e da corrente nos novos pontos nodais são calculados pelo código ajustando uma superfície regradada distorcida usando interpolação linear em ambas as direções, como a da Figura 5.

### 3.4 Resolução das equações

A equação diferencial (37) é uma equação parabólica que contém, como máximo, primeiras derivadas em  $X$  e segundas derivadas em  $Y$  de amplitude e que pode ser resolvida como um problema de valor inicial, impondo condições iniciais na primeira linha ( $IR = 1 \Rightarrow XR = 0$ ) e condições de contorno laterais ( $JR = 1 \Rightarrow YR = 0$  e  $JR = NR \Rightarrow YR = (NR - 1) D YR$ ) (Figura 6). Esta é uma das principais vantagens do

modelo parabólico: não necessita de uma condição de contorno na última linha  $IR = MR$ , tal como seria necessária nos modelos elípticos ou hiperbólicos.

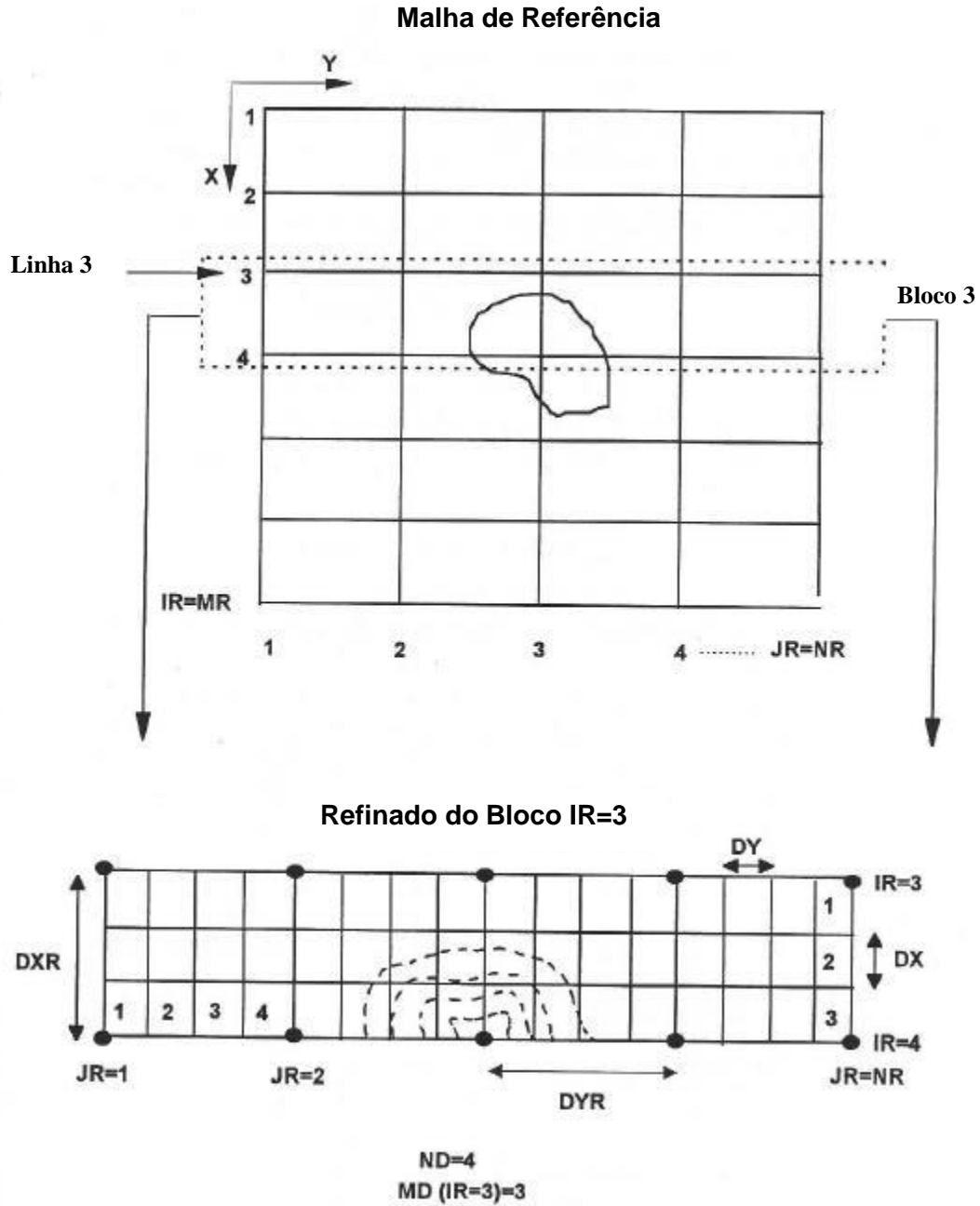


Figura 4 – Subdivisão da malha principal.

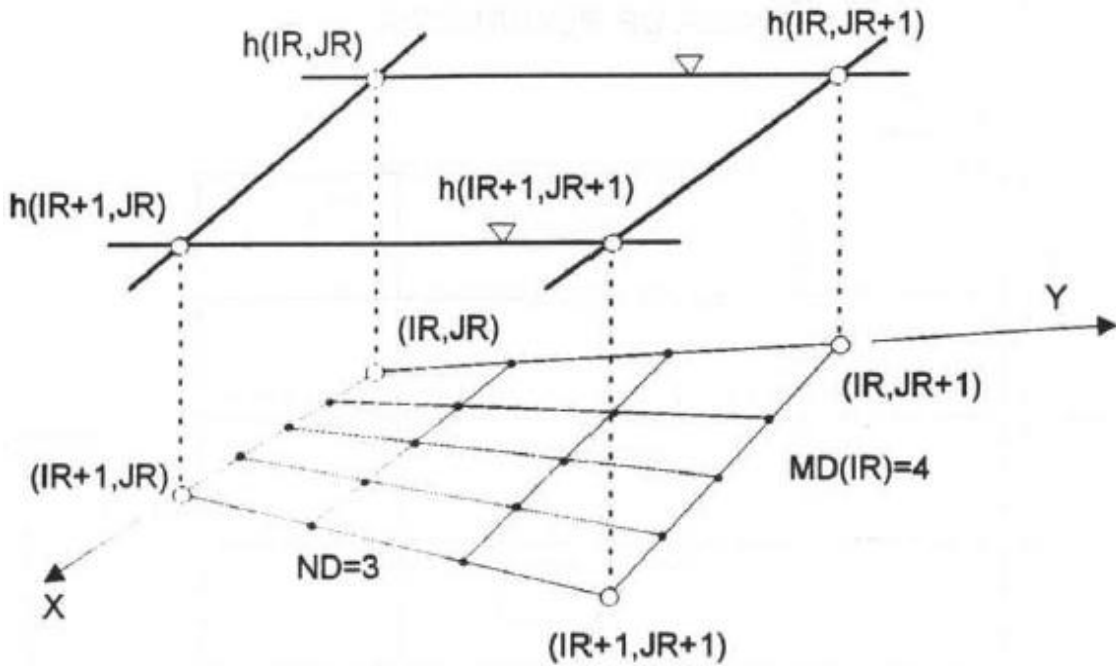


Figura 5 – Interpolação dos dados.

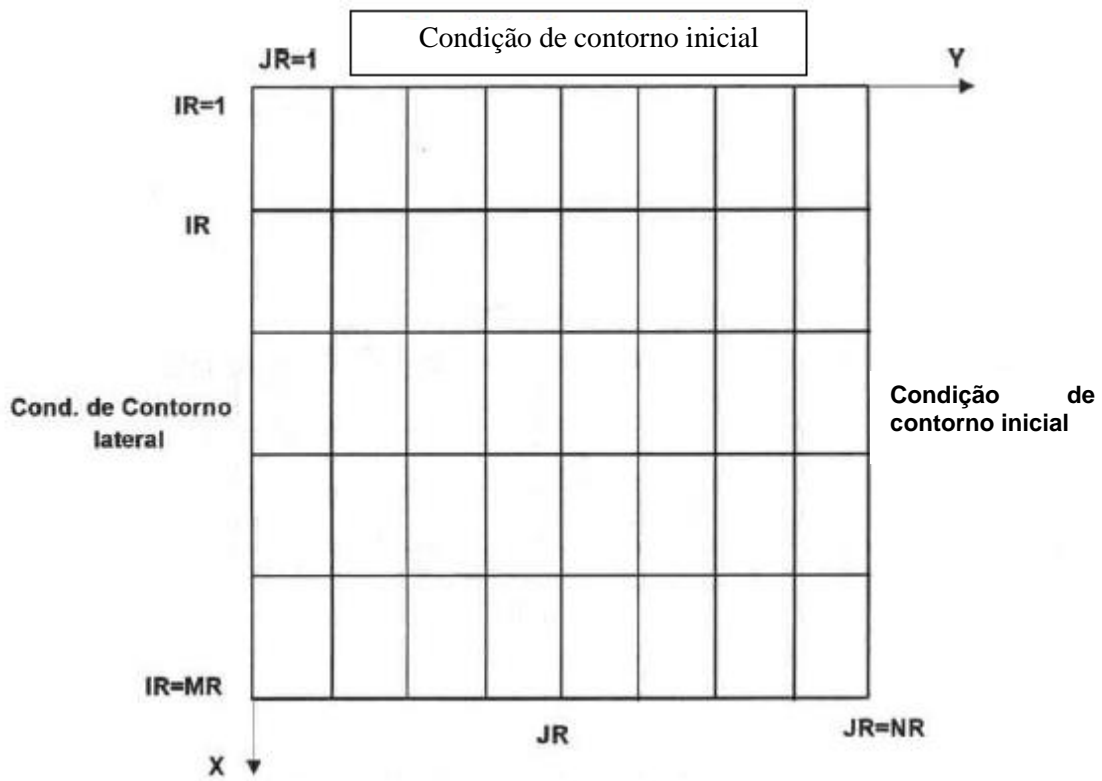


Figura 6 – Domínio numérico do problema de valor inicial apresentado.



As aproximações parabólicas podem ser consideradas equações complexas de difusão não linear, na qual o eixo  $X$  representa o tempo. Para a sua resolução utiliza-se o método de Crank-Nicholson, implícito de segunda ordem que gera os valores da linha  $IR + 1$  em função dos valores da linha  $IR$ , avançando linha a linha sobre a malha de cálculo. Em  $IR = 1$  devem ser especificados os valores de  $A(IR = 1, JR)$ , ou seja, a altura da onda e a direção das ondas incidentes. Além disso, como já foi mencionado, devem ser impostas condições nos contornos laterais  $JR = 1$  e  $JR = NR$

Outra opção possível para resolver o problema numérico seria utilizar uma representação explícita, utilizando um esquema adiantado para as derivadas em  $X_y$  e um esquema centralizado em  $IR$  para a segunda derivada em  $Y$ . No entanto, tal representação não é tão precisa quanto em um esquema implícito de Crank-Nicholson, que é de ordem  $O(\Delta x^2, \Delta y^2)$ .

### 3.5 Implementação numérica da equação de propagação

Para discretizar a equação (37) é utilizado um esquema implícito de diferenças centradas com seis pontos, segundo o esquema da Figura 7. O esquema considera um ponto médio  $P$  em  $Y_j$  centrado entre  $X_{i+1}$  e  $X_i$ , dando o mesmo peso aos valores da linha  $i$  que aos da linha  $i+1$ .

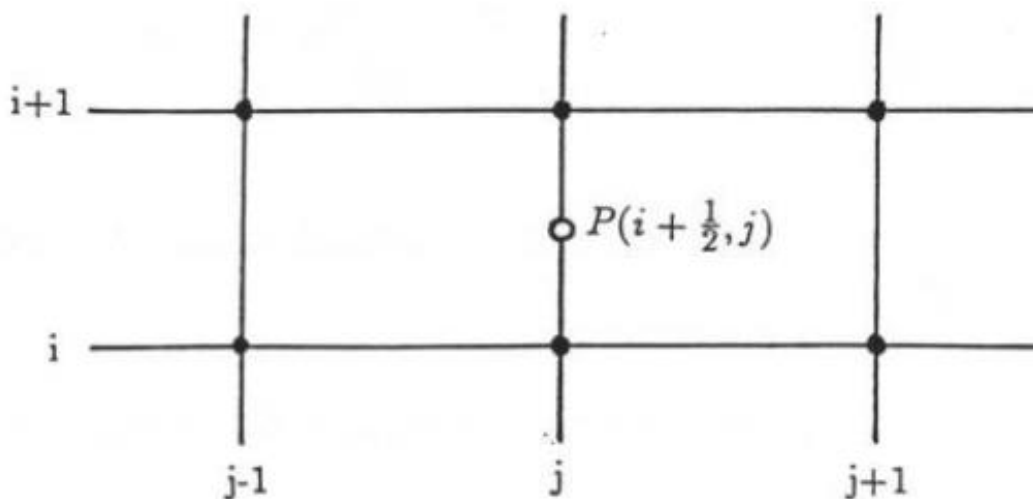


Figura 7 – Esquema implícito de seis pontos.

Discretizando a equação e avaliando as variáveis e suas derivadas no ponto

$P\left(i + \frac{1}{2}, j\right)$  segundo as seguintes expressões:

$$U_p = \frac{U_{i+1,j} + U_{i,j}}{2} + O(\Delta x^2)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_p = \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_p = \frac{U_{i+1,j+1} + U_{i,j+1} - U_{i+1,j-1} - U_{i,j-1}}{4\Delta y} + O(\Delta x^2, \Delta y^2)$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right|_p = \frac{U_{i+1,j+1} - U_{i+1,j-1} - U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2\Delta x \Delta y} + O(\Delta x^2, \Delta y^2)$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right|_p = \frac{U_{i+1,j+1} - 2U_{i+1,j} + U_{i+1,j-1} + U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{2\Delta y^2} + O(\Delta x^2, \Delta y^2)$$

$$\left. \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y^2} \right|_p = \frac{U_{i+1,j+1} - 2U_{i+1,j} + U_{i+1,j-1} - U_{i,j+1} + 2U_{i,j} - U_{i,j-1}}{\Delta x \Delta y^2} + O(\Delta x^2, \Delta y^2)$$

onde  $U$  é qualquer uma das variáveis da equação, resultando em um sistema de equações:

$$aA_{i+1,j+1} + bA_{i+1,j} + cA_{i+1,j-1} = dA_{i,j+1} + eA_{i,j} + fA_{i,j-1} \quad , j = 2, N - 1 \quad (38)$$

onde os coeficientes  $a, b, c, d, e, f$  são expressões conhecidas em variável complexa, dependentes de  $h, c, cg, \dot{u}, \acute{o}, U, V$ , etc.

### 3.6 Implementação numérica das condições de contorno

O sistema de equações (38) não ficou definido ainda em  $j = 1$  e  $j = N$ . Para obter estas duas equações restantes serão necessárias impor condições de contornos laterais. Tais condições devem ser apropriadas para obter um bom resultado de simulação e evitar as perturbações do contorno lateral que são propagadas até o interior do domínio Booij (1981).

---

O modelo tem a possibilidade de tratar dois tipos de condições de contornos laterais:

- contornos fechados, refletivos; e
- contornos abertos, que permitem a transmissão das ondas.

• **Contornos abertos**

Visto que, em geral, os contornos laterais são limites artificiais da área a modelar e são pontos de água, a condição mais realista para estes casos é aquela que permite tanto a entrada quanto a saída das ondas do interior do domínio, sem produzir reflexões inexistentes na realidade (Figura 8).

Esta condição de transmissão pode ser obtida supondo as hipóteses seguintes (KIRBY, 1986b):

- ondas planas;
- não há mudanças da profundidade nos contornos na direção Y;
- a lei de Snell é válida nos contornos.

Admitindo estas hipóteses, considera-se uma onda:

$$A = ae^{i\vec{k}\vec{x}} = ae^{i(kx \cos \alpha + ky \sin \alpha)}$$

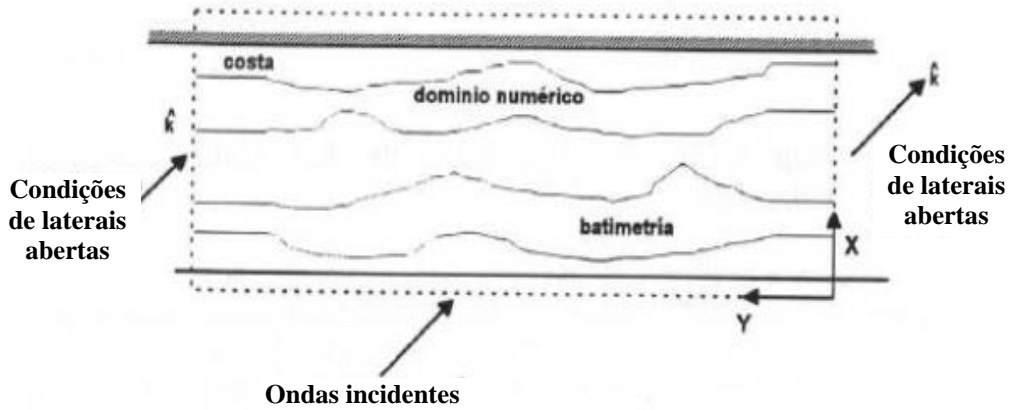


Figura 8 – Condições de contornos laterais abertos.

Onde  $\alpha$  é a direção de propagação. Se for cumprida a lei de Snell, então:

$$m = k \sin \alpha = cte$$

E derivando em  $y$  fica:

$$\frac{\partial A}{\partial y} = ik \sin \alpha A = imA$$

que é a condição lateral para contornos abertos.

Dado que o esquema utilizado é de segunda ordem, a condição de contorno será imposta no ponto médio de  $j = 1$  e  $j = 2$  e de  $j = N - 1$  e  $j = N$ . Desta forma, resulta:

$$\frac{A_{i+j,j+1} - A_{i+1,j}}{\Delta y} = im \frac{A_{i+1,j+1} + A_{i+1,j}}{2} \quad j = 1$$

$$\frac{A_{i+j,j} - A_{i+1,j-1}}{\Delta y} = im \frac{A_{i+1,j} + A_{i+1,j-1}}{2} \quad j = N$$

E onde  $m$  se estima na linha anterior (KIRBY, 1986b):

$$m_{est} = -i \left. \frac{\partial A}{\partial y} \right|_i$$

Agrupando os diversos termos, ficam duas equações da forma:

$$aA_{i+1,j+1} + bA_{i+1,j} = dA_{i,j+1} + eA_{i,j} \quad , \text{para } j = 1 \quad (39)$$

$$bA_{i+1,j} + cA_{i+1,j-1} = eA_{i,j} + fA_{i,j-1} \quad , \text{para } j = N \quad (40)$$

• **Contornos refletivos**

Para o caso de contornos físicos reais, como diques ou paredes verticais, uma condição totalmente refletiva é obtida impondo (KIRBY, 1986b):

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 0$$

Da mesma maneira que no caso anterior, para que o esquema continue sendo de segunda ordem em  $\Delta y$ , as variáveis são discretizadas no ponto médio, resultando:

$$\frac{A_{i+1,j+1} - A_{i+1,j}}{\Delta y} = 0 \quad , j = 1 \quad (41)$$

$$\frac{A_{i+1,j} - A_{i+1,j-1}}{\Delta y} = 0 \quad , j = N \quad (42)$$

Apesar da eventual imposição de condições de contorno abertos, os resultados indicam que sempre existe certa reflexão espúria até o interior do domínio. No caso de comprovar que a área de interesse fica potencialmente afetada por tais reflexões provenientes do contorno, deverá ser aumentada a largura - em Y- do domínio.

**3.7 Sistema de equações a resolver**

Após discretizar a equação governante (37) e aplicar as respectivas condições de contornos laterais, obtém-se um sistema de equações tal como (38), (39) e (40) ou (38), (41) e (42), cuja forma geral é:

$$CP_3A_{i+1,j-1} + CP_1A_{i+1,j} + CP_2A_{i+1,j+1} = C_3A_{i,j-1} + C_1A_{i,j} + C_2A_{i,j+1} \quad (43)$$

onde os coeficientes  $C_k$  e  $CP_k$  são expressões complexas conhecidas dependentes de  $h$ ,  $c$ ,  $cg$ ,  $\dot{u}$ ,  $\acute{o}$ ,  $U$ ,  $V$ , etc. e onde as amplitudes complexas  $A_{i,k}$  também são

conhecidas, sendo  $A_{i+1,k}$  as variáveis desconhecidas. O sistema de equações resultante é tridiagonal, implícito em  $A_{i+1,k}$  e é resolvido facilmente, transformando a notação matricial:

$$\begin{bmatrix} M_1 & R_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ L_2 & M_2 & R_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L_3 & M_3 & R_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & L_{n-2} & M_{n-2} & R_{n-2} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & L_{n-1} & M_{n-1} & R_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & L_n & M_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{i+1,1} \\ A_{i+1,2} \\ A_{i+1,3} \\ \dots \\ A_{i+1,n-2} \\ A_{i+1,n-1} \\ A_{i+1,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ T_2 \\ T_3 \\ \dots \\ T_{n-2} \\ T_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

mediante o algoritmo de dupla varredura de Carnahan *et. al.* (1969), que permite resolver um sistema linear de  $n$  variáveis com matriz tridiagonal.

Tal sistema de equações (44) é resolvido avançando linha a linha, partindo das condições iniciais e calculando progressivamente os valores da linha  $i+1$  a partir dos valores da linha  $i$ , até chegar à última linha  $IR=MR$ . Os valores das incógnitas obtidas em cada iteração são  $(A(i, j), j = 1, N)$  demonstrados de forma complexa:

$$A = a + ib = |A|e^{i\theta}$$

Assim, a altura da onda é:

$$H = 2|A|$$

E para obter a direção a partir da fase é:

$$\vec{k} = |k|(\cos \alpha, \sin \alpha) = \vec{\nabla}\theta$$

onde  $\alpha$  é a direção de propagação.

Os coeficientes  $L_j, M_j, R_j, T_j$  contém alguns termos não lineares devido a  $G(|A|, kh)$  e ao fator  $\gamma_{qb}$  de dissipação por quebra, que serão tratados mais adiante em outras seções. Os coeficientes são obtidos da discretização da equação (37) cuidadosamente e utilizando as expressões obtidas na seção 3.5.

**3.8 Implementação numérica dos termos não lineares**

Os termos não lineares  $G(|A|, kh) \neq 0$  e  $\gamma_{qb}(|A|) \neq 0$  da equação de propagação convertem o esquema numérico em um sistema cúbico para os valores incógnitos  $A_{i+1,j}$ , no caso sejam considerados iguais os valores das linhas  $i$  e  $i+1$  no método de Crank-Nicholson. Estes termos afetam o valor dos coeficientes do sistema de equações (44), que deixam de ser função exclusiva da topografia e das características da onda e passam a depender também de  $|A_{i+1,j}|$ , desconhecida.

Para resolver este problema é utilizado um esquema iterativo para:

$$\dots + \frac{\gamma_{qb}(|A|)A}{2} + i \frac{\sigma}{2} G(|A|, kh)A = 0$$

Da forma:

$$\dots + \frac{\gamma_{qb}(|A_{i+1,j}^{s-1}|)A_{i+1,j}^2 + \gamma_{qb}(|A_{i,j}|)A_{i,j}}{4} + i \frac{\sigma_{i+1,j} + \sigma_{i,j}}{4} \frac{G(|A_{i+1,j}^{s-1}|, kh_{i+1,j})A_{i+1,j}^5 + G(|A_{i,j}|, kh_{i,j})A_{i,j}}{2} = 0$$

onde  $s$  indica a iteração e onde para  $s = 1$ , ou seja, para a primeira iteração tem-se  $|A_{i+1,j}^0| = |A_{i,j}|$ .

Assim, o valor obtido de  $A_{i+1,j}^s$  em cada iteração é substituído na seguinte até obter a convergência. Para as aplicações implementadas no modelo OLUCA-MC foram suficientes duas iterações, visto que foi utilizado  $\Delta x = L/10$ , que é suficientemente pequeno.

**3.9 Implementação numérica de quebra**

O algoritmo de quebra utilizado no modelo obriga a realizar uma iteração adicional além daquela já descrita para a não linearidade, sempre que se passe de onda de quebra a onda sem quebrar e vice-versa.

---

Em primeiro lugar, é calculada a linha  $i+1$  com os valores de dissipação nulos e é verificado se a onda já quebro em algum nó de tal linha. Se positivo, é calculado o coeficiente correspondente de dissipação e calcula-se novamente a linha  $i+1$ . Posteriormente, é realizada a segunda iteração, ainda que esta se deva unicamente aos termos não lineares  $G$  e  $\tilde{a}$ .

Pode-se cogitar que se a altura de onda excedeu a de quebra, bastaria modificar a amplitude no nó correspondente de acordo com algum critério de quebra. Isto, no entanto, não seria correto já que seriam introduzidos efeitos de difração não realistas sobre os nós adjacentes.

De maneira similar, se ocorre partindo da linha  $i$  e com valores de dissipação não nulos, é calculada a linha  $i+1$  e comprovado se a onda foi estabilizada em algum nó. Se positivo, é anulado o coeficiente correspondente de dissipação e calculada novamente a linha  $i+1$ . A seguir, é realizada a segunda iteração para resolver a não linearidade.

Na Figura 9 é mostrado um esquema que permite esclarecer melhor o funcionamento do algoritmo de quebra. Em tal gráfico, a atribuição “estável” significa que a dissipação por quebra é nula ( $\gamma_{qb} = 0$ ), porque as ondas ainda não começaram a quebrar, ou porque já quebraram, mas foram reformadas e estabilizaram, isto é,  $H < \Gamma h$



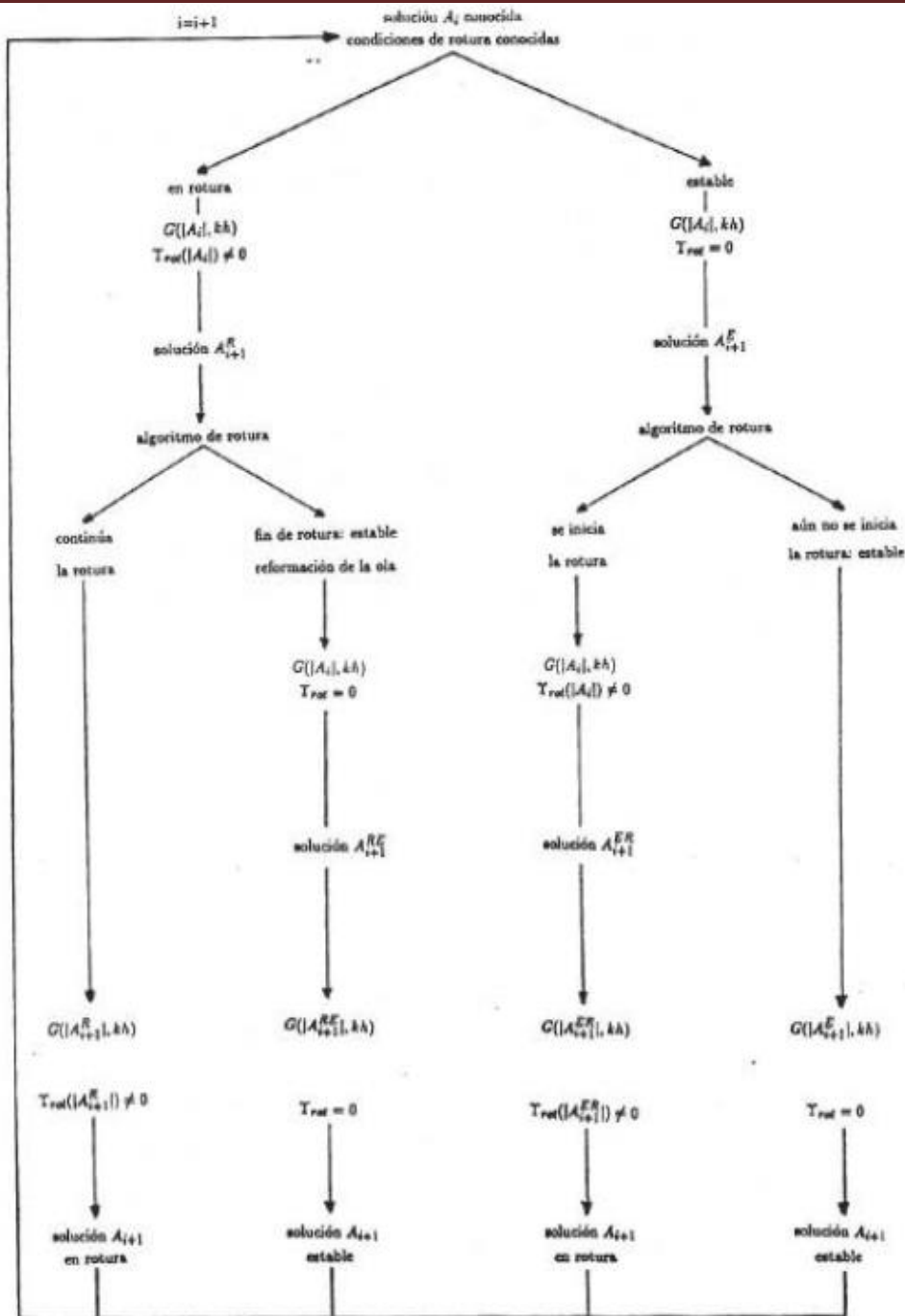


Figura 9 – Algoritmo de quebra.

### 3.10 Modelagem de áreas de terra no interior do domínio

A inclusão de linhas de costa, ilhas, paredes verticais, diques, etc., de forma definitiva, de áreas de terra no interior da área de cálculo do modelo de propagação,

geralmente requer uma modificação das características de alguns nós da malha. No entanto, como a área de terra que emerge estará rodeada de uma zona de surfe, especialmente se ela possuir declividade, pode ser introduzido um artifício que simplifica nitidamente a modelagem da malha e, em geral, do código.

Substituindo-se a área que emerge acima do nível da água por um banco ou “*shoal*” de fundo plano e de profundidade muito reduzida, da ordem de 1 mm, é possível incluir a área de terra no interior do domínio sem modificar este último. Em outras palavras, as áreas de terra do domínio são inundadas artificialmente com uma película de água de profundidade  $\varepsilon = 1 \text{ mm}$ . Desta forma, todo o domínio de cálculo estará formado por água e todos os nós da malha serão ativos. Essa técnica, conhecida como técnica “*thin film*” foi proposta por Dalrymple, Kirby & Mann, (1984) para a propagação de ondas na presença de ilhas (Figura 10).

Essa técnica do “*thin film*” acoplada a um modelo de quebra permite prever eficientemente as alturas de onda nas imediações de ilhas ou obstáculos. O algoritmo de quebra reduz as alturas de onda através da área de surf até um pequeno valor na linha de costa “real”, após isto, tal algoritmo segue reduzindo a altura da onda que é propagada sobre o “*thin film*” para um valor praticamente nulo de  $\Gamma$  vezes a profundidade, ou seja,  $\Gamma \text{ mm}$ . Esta onda que se propaga pela área de terra inundada leva associada uma energia desprezível.

$$E \approx H^2 \rightarrow E \approx \Gamma (0,001\text{m})^2$$

que, portanto, não afeta o processo dinâmico de propagação de ondas a sotavento da ilha.

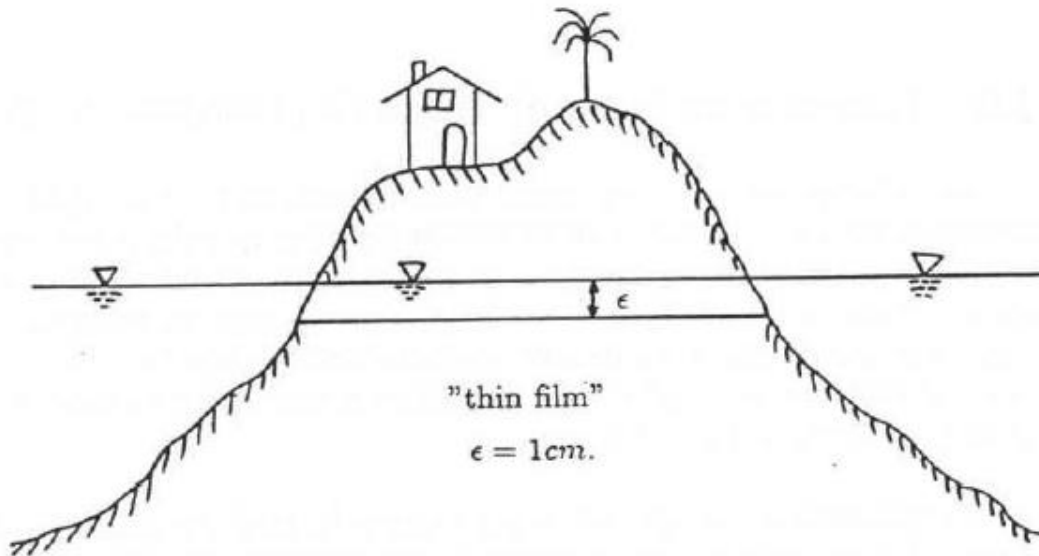


Figura 10 – Representação de áreas de terra no modelo.

A transformação da área de terra é realizada pelo código numérico quando verifica os dados de entrada e observa valores negativos da profundidade. Uma instrução do código converte tais valores em profundidade 1 mm.

### 3.11 Filtro do ruído numérico

Quando são utilizadas aproximações parabólicas de ordem superior para a simulação da propagação de ondas ao redor de ilhas ou obstáculos, a presença de ondas em quebra em uma parte dos nós de uma linha (direção  $Y$ ) e de ondas sem quebrar no resto da linha, provoca mudanças bruscas na amplitude das ondas entre dois pontos adjacentes da malha, que podem chegar a gerar ruído numérico. Este ruído numérico aparece inicialmente em forma de grandes valores de  $|A|$  em nós isolados e é propagado então, como ondas de alta frequência (*“high-wavenumber noise”*) em direção transversal até o interior do domínio de cálculo, podendo chegar a distorcer os resultados.

Para resolver tal ruído numérico é necessário projetar um filtro que reduza estas perturbações. Kirby (1986a) e o Grupo de Engenharia Oceanográfica e Costeira da

Universidade da Cantabria, após um amplo estudo deste problema adotou um filtro de forma que a energia na linha filtrada é mantida constante, isto é:

$$\text{linha } i: \sum_{j=1}^n |A_{i,j}|^2 = \sum_{j=1}^n |A_{i,j}^f|^2 = cte$$

onde  $A_{i,j}$  é o valor da amplitude complexa antes de realizar a filtragem e  $A_{i,j}^f$  é o valor filtrado uma vez.

No código numérico apresentado foi incluído este filtro, além de uma instrução para detectar valores maiores de  $|A|$  e reduzi-los até a ordem da profundidade:

$$A = |A|e^{i\theta}; \text{ si } |A| > h \rightarrow A = \frac{A}{|A|} h$$

$$|A_{i,j}^f|^2 = c|A_{i,j-1}|^2 + (1 - 2c)|A_{i,j}|^2 + c|A_{i,j+1}|^2$$

$$e^{i\theta_{i,j}^f} = \frac{cA_{i,j-1} + (1 - 2c)A_{i,j} + cA_{i,j+1}}{|cA_{i,j-1} + (1 - 2c)A_{i,j} + cA_{i,j+1}|}$$

$$A_{i,j}^f = |A_{i,j}^f| e^{i\theta_{i,j}^f}$$

onde  $c$  é o peso do filtro com valores  $0, 1 \leq c \leq 0,3$ , ( $c = 0,15$  no OLUCA-MC).

Finalmente, um problema adicional que aparece com os esquemas de ordem superior é sua sensibilidade às condições de contorno. Por isso, como já foi comentado na seção 3.6, é aconselhável que exista uma distância considerável entre os contornos e a área de interesse.

**CAPÍTULO 4: ESTRUTURA DO CÓDIGO DO  
PROGRAMA**

---

## 4. Estrutura do Código do Programa

### 4.1 Introdução

O programa OLUCA-MC é uma modificação ao programa REF/DIF 1, programa codificado por James T. Kirby e Robert A. Dalrymple do “*Center for Applied Coastal Research, Department of Civil Engineering, University of Delaware, Newark, U.S.A.*”.

O programa REF/DIF 1 foi inicialmente codificado para ser aplicado em casos teóricos, sendo limitada sua aplicação para casos reais. Devido a esta limitação, o Grupo de Engenharia Oceanográfica e Costeira da Universidade da Cantabria modificou o REF/DIF 1, adaptando-o para ser aplicado em casos de batimetrias e ondas reais. O programa denominado OLUCA-MC tem sido aplicado e contrastado em diferentes estudos de Engenharia Litoral desde 1990, obtendo-se bons resultados.

A resolução de um problema geral de propagação de ondas, a partir do modelo exposto anteriormente, necessita seguir o seguinte processo:

Em primeiro lugar, verificar os dados de entrada (batimetria, correntes) para evitar erros grosseiros como descontinuidades na batimetria ou correntes em regime supercrítico ( $n^\circ$  de Froude  $> 1$ ).

Posteriormente, a partir das ondas incidentes, inicializar a variável  $A$  na primeira linha do domínio, assumindo como válida a lei de Snell e tomando um número de onda  $k$  idêntico em toda a linha, de tal forma que se cumpra:

$$A_{i,j} = \frac{H}{2} e^{iky_j \sin \alpha} \quad x_1 = 0 ; j = 1, NR$$

com  $k \sin \alpha = cte$ .

Posteriormente, antes de resolver as equações, densificar a malha de cálculo segundo os dados especificados no início do processo e calcular as diversas constantes existentes para definir os coeficientes da matriz do sistema.

Com a malha de cálculo definida e obtidos os coeficientes da matriz e do termo independente, resolver o sistema de equações (44) resultante da equação parabólica

---

governante, calcular o início ou o final da quebra e realizar uma segunda iteração para implementar a não linearidade da equação (37).

Finalmente, verificar os resultados obtidos para a linha  $i + 1$  para comprovar que não existem valores fisicamente irreais ( $|A| > h$ ) e obter os valores de  $H$  e  $\dot{a}$  na linha  $i + 1$ , voltando a realizar o mesmo processo exposto até alcançar a última linha do domínio. Um diagrama da estrutura global do programa pode ser visto na Figura 11.

#### 4.2 Descrição de sub-rotinas

O código do programa de propagação OLUCA-MC está organizado em um programa principal e treze sub-rotinas, sem chamar a programas ou pacotes externos. Está codificado completamente em FORTRAN77.

O programa está estruturado em dois níveis:

**1:** Nível principal, onde o programa lê dados, verifica dados lidos e começa o bloco de cálculo. Este é o bloco principal do programa (Figura 12).

**2:** O segundo nível do programa gera malhas e soluciona o sistema. Um esquema deste nível pode ser visto na Figura 13.

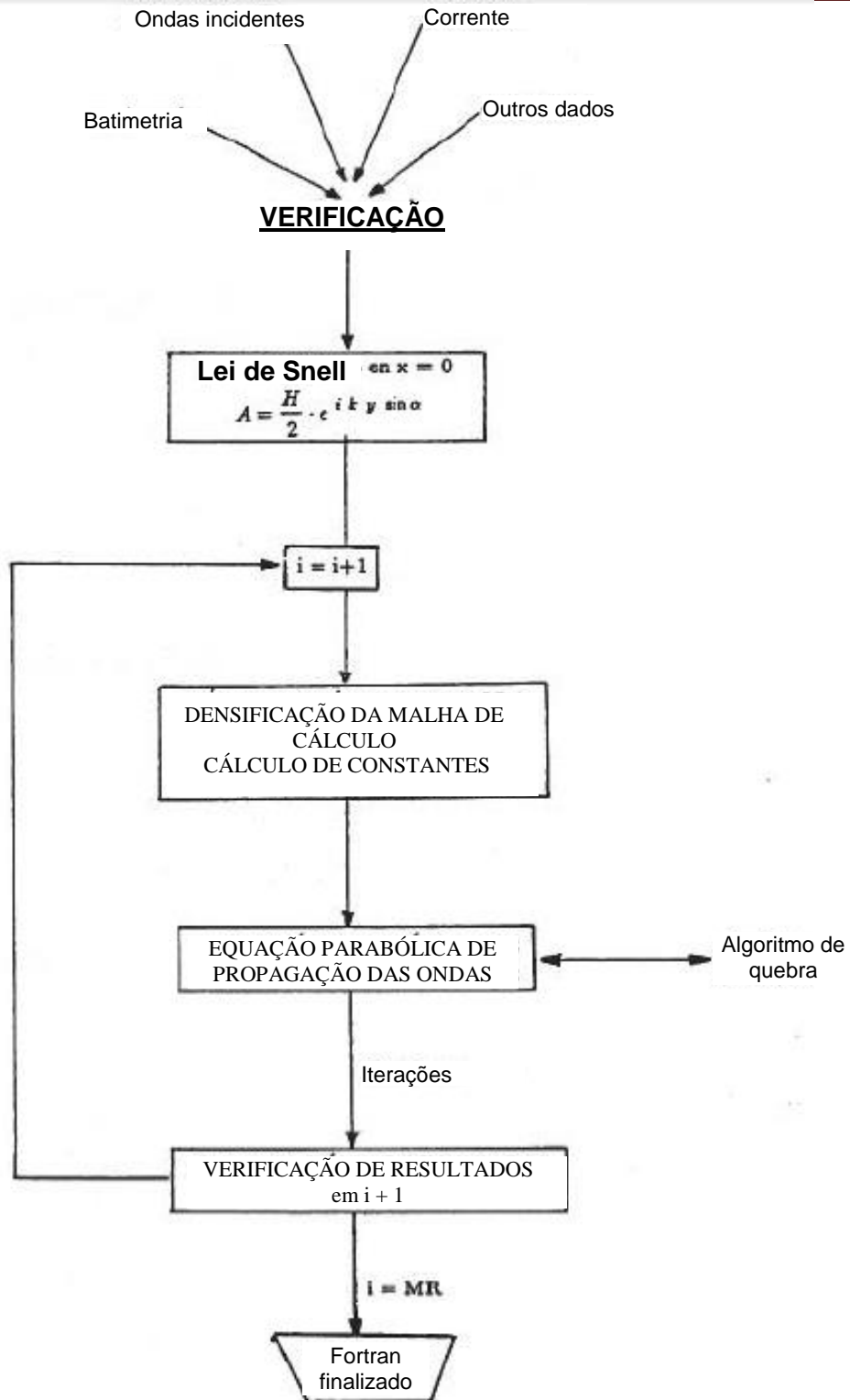


Figura 11 – Estrutura do Código Fortran.



# Programa Principal

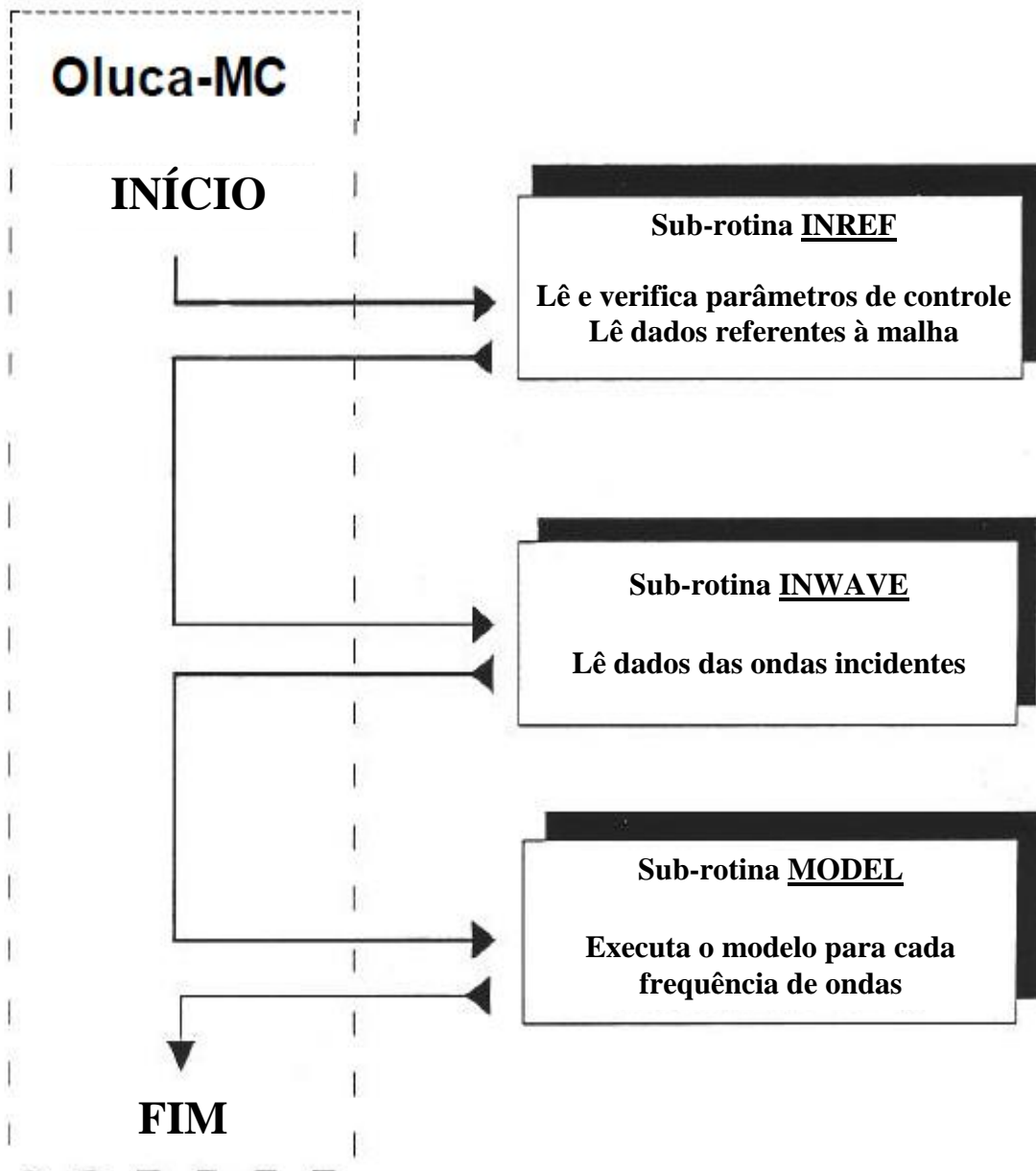


Figura 12 – OLUCA-MC: Programa principal (Nível 1).

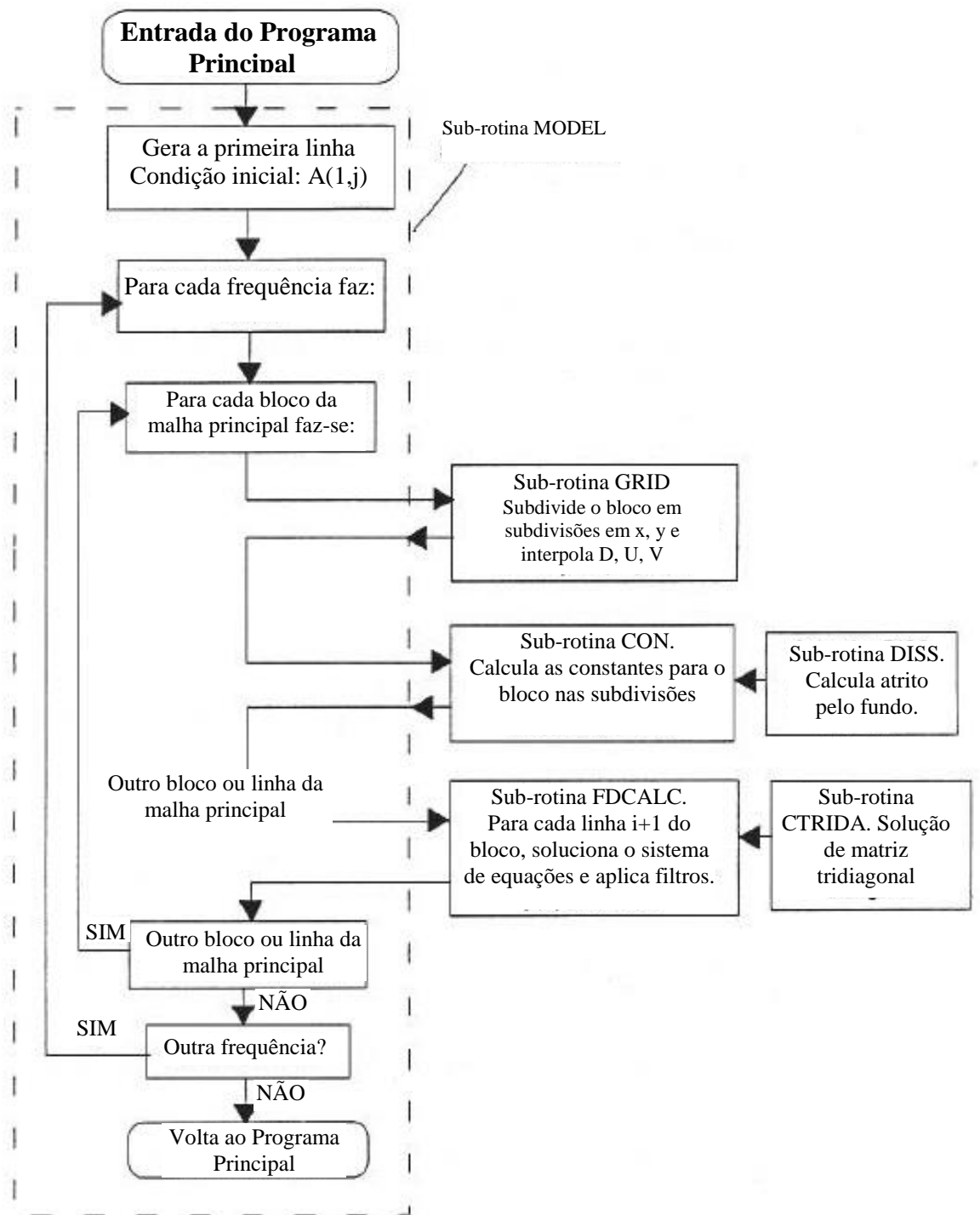


Figura 13 – OLUCA-MC: Sub-rotina MODEL (Nível 2).

**1. Programa Principal:**

- Define dimensionamento de variáveis, matrizes, etc.

- 
- Gera nomes e arquivos de entrada e saída do programa.
  - Chama sub-rotinas: INREF, INWAVE, MODEL.
  - Fecha arquivos e finaliza a execução.

### **2. Sub-rotina INREF**

- É chamada no Programa Principal.
- Lê parâmetros de controle, tamanho da malha, dimensões da submalha, profundidades  $h(x, y)$ , velocidades  $U(x, y)$  e  $V(x, y)$ .
  - Verifica profundidades e número de Froude com velocidades.
  - Muda para unidade MKS, se necessário.

### **3. Sub-rotina INWAVE**

- É chamada no Programa Principal.
- Lê dados das ondas na primeira linha da malha. Quer seja de ondas monocromáticas, ondas direcionais discretas ou um arquivo de saída de uma malha adicionada com o cálculo da amplitude complexa da última linha.

### **4. Sub-rotina MODEL**

- É chamada no Programa Principal.
- Esta sub-rotina controla a parte operacional do modelo. Para cada período inicial junto a uma variação de maré, desenvolve as seguintes séries de operações:
  - a. Constrói a amplitude complexa da primeira linha da malha geral.
  - b. Para cada bloco ou linha da malha geral, faz:
    - Chama **GRID** para interpolar D, U, V da submalha.
    - Chama **CON** para calcular as constantes da submalha interpolada.

---

- Chama **FDCALC** para calcular as amplitudes complexas nas subdivisões do bloco.

- Guarda os resultados da última linha da malha geral, no caso de existir posteriormente uma malha aninhada.

#### 5. Sub-rotina **GRID**:

- É chamada a partir de **MODEL**.
- Para um bloco *IR* dado, faz:
  - a. Avalia  $K_0$ , número de onda médio na primeira linha do bloco, onde é calculado o número de subdivisões do bloco, tendo 10 por comprimento de onda na direção  $x$ .
  - b. Soma a profundidade da maré e em terra coloca a “*thin film*” de 1 mm de água.
  - c. Interpola para uma submalha de um bloco, dada a profundidade  $D(x, y)$ , e as velocidades  $U(x, y)$  e  $V(x, y)$ .

#### 6. Sub-rotina **CON**:

- É chamada a partir de **MODEL**.
- Para um bloco *IR* dado, faz:
  - a. Calcula diferentes constantes para mais adiante construir as matrizes de cálculo.
  - b. Chama a sub-rotina **DISS**, onde calcula o atrito por fundo dos pontos da submalha.
  - c. Avalia o número de onda médio de cada linha da submalha.

#### 7. Sub-rotina **FDCALC**:

- É chamada a partir de **MODEL**.

- Para cada linha  $(i+1)$  da submalha, em um bloco  $IR$  dado, faz:
  - a. Carrega a matriz tridiagonal e o vetor independente (44). Para uma primeira aproximação, não leva em conta a quebra e os termos não lineares como é mostrado na seção 3.8.
  - b. Chama **CTRIDA**, onde encontra o vetor solução de  $A(i+1, j)$ .
  - c. Verifica a quebra em cada um dos pontos da linha, se algum ou vários deles tiverem sido quebrados ou se continuarem a quebrar; em tal caso, retorna para (a.), incorporando a quebra e calculando pela segunda vez  $A(i+1, j)$ . Finalmente, a rotina se repete pela terceira vez, substituindo esta solução  $A(i+1, j)$  nos termos não lineares, obtendo assim o vetor solução da amplitude complexa  $A(i+1, j)$ , terminando o ciclo de iterações.
  - d. Por outro lado, se ao verificar a quebra em (c.), nenhum ponto da linha se encontrar em quebra, o programa volta a (a.) utilizando  $A(i+1, j)$  calculado da primeira iteração e substituindo nos termos não lineares, termina o ciclo de iterações.
  - e. Verifica se a amplitude é maior que a profundidade ( $|A(i+1, j)| > D(i+1, j)$ ), caso que ocorre nos pontos de terra com uma película fina de água. Neste caso, reduz tal amplitude à ordem da profundidade.
  - f. Aplica o filtro de conservação de energia, seção 3.11, quando ocorre a quebra em, pelo menos, um ponto da linha.
  - g. Quando finalizar todas as linhas do bloco, escreve os resultados da última linha nos arquivos de saída. O controle volta a **MODEL**, onde passa para um novo bloco  $i+1$  da malha geral.

#### **8. Sub-rotina CTRIDA:**

- É chamada a partir de **FDCALC**.
- Avalia a solução das equações implícitas, por dupla varredura.

#### **9. Sub-rotina DISS:**

- É chamada a partir de **CON**.

- 
- Avalia os coeficientes de dissipação por atrito, baseado no modelo escolhido (laminar, turbulento ou poroso).

#### **10. Sub-rotina WVNUM:**

- É chamada a partir de **MODEL**, **GRID** e **CON**.
- Encontra os números de onda  $K$  da equação de dispersão onda-corrente, pelo método de Newton-Raphson.

#### **11. Sub-rotina ACALC:**

- É chamada a partir de **MODEL**.
- Normaliza o espectro direcional de densidade no código, mas nesta versão não é utilizada.

#### **12. Sub-rotina BNUM:**

- É chamada a partir de **ACALC**.
- Calcula o número de Bernoulli  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

#### **13. Função RAND:**

- É chamada a partir de **MODEL**.
- É um gerador de números aleatórios para inicializar a fase aleatória, se for utilizado um modelo de dispersão angular.

#### **14. Função BNUM.**

- É chamada a partir de **BNUM**.

- Calcula o fatorial  $n!$  de um inteiro  $n$ .

**CAPÍTULO 5: APLICAÇÃO DO MODELO**  
**OLUCA - MC**

---



---

## 5. Aplicação do Modelo OLUCA - MC

### 5.1 Introdução

Neste capítulo é aplicado o modelo de propagação OLUCA-MC para casos com solução analítica e testes de modelos físicos em laboratório. Inicialmente, é aplicado o modelo a dois casos com solução analítica conhecida:

(1) Caso com batimetria reta e paralela, onde é comprovado o empinamento, refração pelo fundo e quebra, e (2) difração em um fundo plano com presença de um obstáculo. Depois, é aplicado o modelo aos testes realizados por Berkhoff (1982), comparando com seus resultados onde existe o efeito combinado refração-difração. Finalmente, é aplicado o modelo a um teste idealizado, proposto por Arthur (1950), onde é produzida a interação onda-corrente e são comparados os resultados com outros modelos numéricos aplicados ao mesmo caso.

As figuras que são apresentadas neste item provêm da calibração efetuada por García (1994), aplicando este modelo.

### 5.2 Fenômenos de propagação com solução analítica conhecida

- ***Empinamento***

Quando as ondas incidem normalmente em uma praia com batimetria reta e paralela, as mudanças nos parâmetros característicos de onda são causadas unicamente pela variação da profundidade. Este fenômeno é denominado empinamento ou “*shoaling*” e provoca mudanças tanto na altura da onda quanto no comprimento da onda.

Em um fundo com declividade, o empinamento dá lugar, inicialmente, a uma redução da altura de onda até alcançar um mínimo a partir do qual a altura de onda volta a aumentar rapidamente ao diminuir a profundidade.

Para modelar numericamente o fenômeno do empinamento foi propagado um trem de ondas na direção do eixo  $X$  sobre uma praia, como é mostrado na Figura 14. O resultado numérico é comparado com a solução analítica que é obtida a partir da

hipótese de conservação do fluxo de energia  $E c_g = cte$  que dá lugar às seguintes equações:

$$\omega^2 = gk \tanh kh; \quad c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

$$\frac{H_i}{H_0} = \sqrt{\frac{c_{g_0}}{c_{g_i}}} = K_{shoaling}$$

Na Figura 15 é mostrado o coeficiente de empinamento em função de  $kh$ . O erro quadrático médio relativo para a altura de onda é da ordem de  $10^{-4}$ .

Dada à linearidade das equações, os resultados não dependem da altura de onda inicial  $H_0$ . Assim mesmo, foi comprovada a influência da declividade e da esbeltez das ondas  $H_0/L_0$  (observa-se que os resultados dependem muito ligeiramente de tal esbeltez). Em especial, é observado que os erros relativos aumentam ligeiramente ao aumentar o período da onda, especialmente para o caso de ondas longas em águas pouco profundas, embora a sua influência não seja quantitativamente significativa. Em relação à declividade, os resultados praticamente não dependem do valor da mesma.

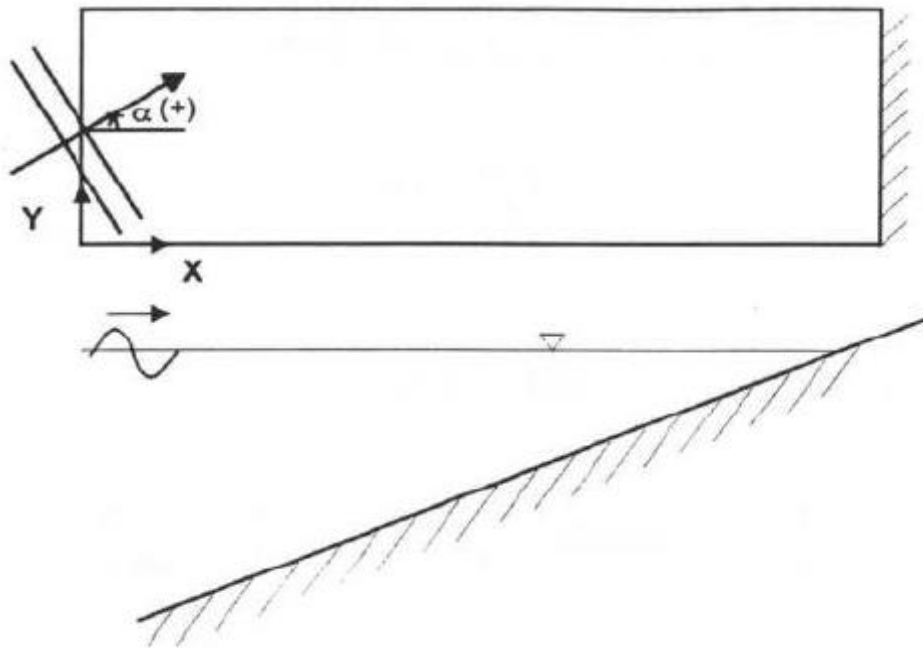


Figura 14 – Esquema de batimetria reta e paralela.

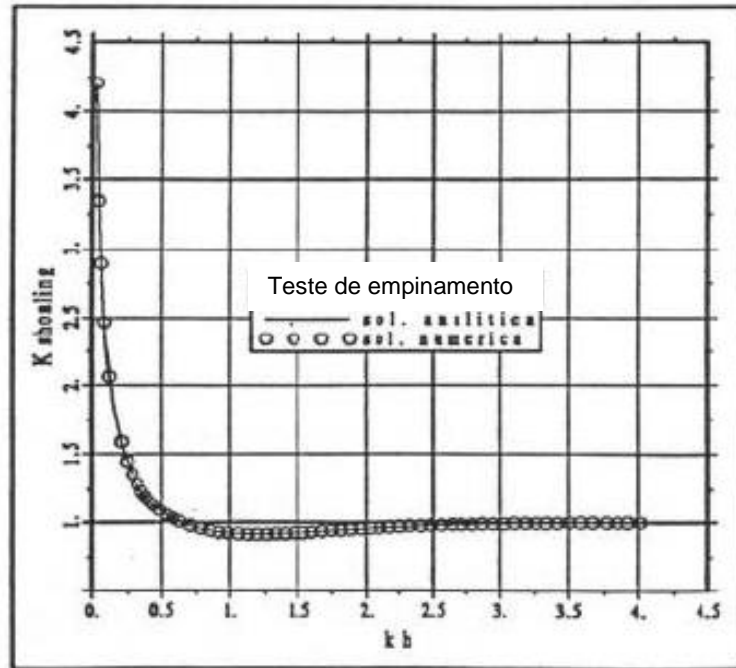


Figura 15 – Fenômeno de empinamento sobre uma declividade.

- **Refração pelo fundo**

Na ausência de correntes, considerando o período da onda constante, a celeridade da onda depende principalmente da profundidade local, enquanto que o efeito da altura de onda em tal celeridade é muito menor (dispersão por amplitude). A existência de um gradiente da celeridade da onda ao longo de uma frente provoca uma mudança na direção de propagação, fenômeno que é conhecido com o nome de refração pelo fundo ou, simplesmente, refração.

De acordo com a teoria linear de ondas e no caso particular de batimetria reta e paralela ao eixo Y e aplicando a lei de Snell:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{L} = \text{constante}$$

A altura de onda refratada é obtida a partir de:

$$c = \frac{L}{T} = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kh} = \frac{\omega}{k}; \quad c_g = \frac{c}{2} \left( 1 + \frac{2kh}{\text{sen } h 2kh} \right)$$

$$H_i = H_0 K_r K_s = H_0 \sqrt{\frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_i}} \sqrt{\frac{c_{g_0}}{c_{g_i}}}$$

E o ângulo que forma as frentes com a batimetria, ou seja, a direção de propagação é obtida a partir da expressão:

$$\alpha_i = \text{sen}^{-1} \left( \frac{c_i}{c_0} \text{sen } \alpha_0 \right)$$

Nesta seção são apresentados os resultados para o coeficiente de propagação total  $K_r K_s = H_i / H_0$  e para o ângulo de propagação  $\alpha_i$  em função de  $kh$  e de diferentes ângulos de incidências iniciais  $\alpha_0$ . Neste caso, não foi estudada a influência do período e nem da declividade, já que para o caso de empinamento já foi comprovado que não são significativas.

Para a validação do fenômeno de refração foi propagado um trem de ondas sobre um fundo plano inclinado, como o da Figura 14 com os seguintes ângulos de incidência: 15°, 30°, 45°, 50° e 60°.

Nas Figuras 16 e 17 pode ser verificado que, à medida que aumenta o ângulo de incidência, os erros quadráticos médios relativos crescem tanto para a altura de onda quanto para o ângulo de propagação, obtendo-se os seguintes erros relativos:

Incidência	$\alpha_0 = 15^\circ$	$\alpha_0 = 30^\circ$	$\alpha_0 = 45^\circ$	$\alpha_0 = 50^\circ$	$\alpha_0 = 60^\circ$
$E_{rms}(H)$	$2,2 \cdot 10^{-4}$	$3,7 \cdot 10^{-3}$	$2,1 \cdot 10^{-2}$	$3,4 \cdot 10^{-2}$	$8,1 \cdot 10^{-2}$
$E_{rms}(\acute{\alpha})$	$1,4 \cdot 10^{-4}$	$4,4 \cdot 10^{-4}$	$4,2 \cdot 10^{-3}$	$7,6 \cdot 10^{-3}$	$2,0 \cdot 10^{-2}$

A partir dos resultados anteriores pode ser comprovado que, admitindo erros relativos de 3%, o ângulo de incidência deve ser menor que 50°, já que para 60° é obtido  $E_{rms}(H) \cong 8\%$ .

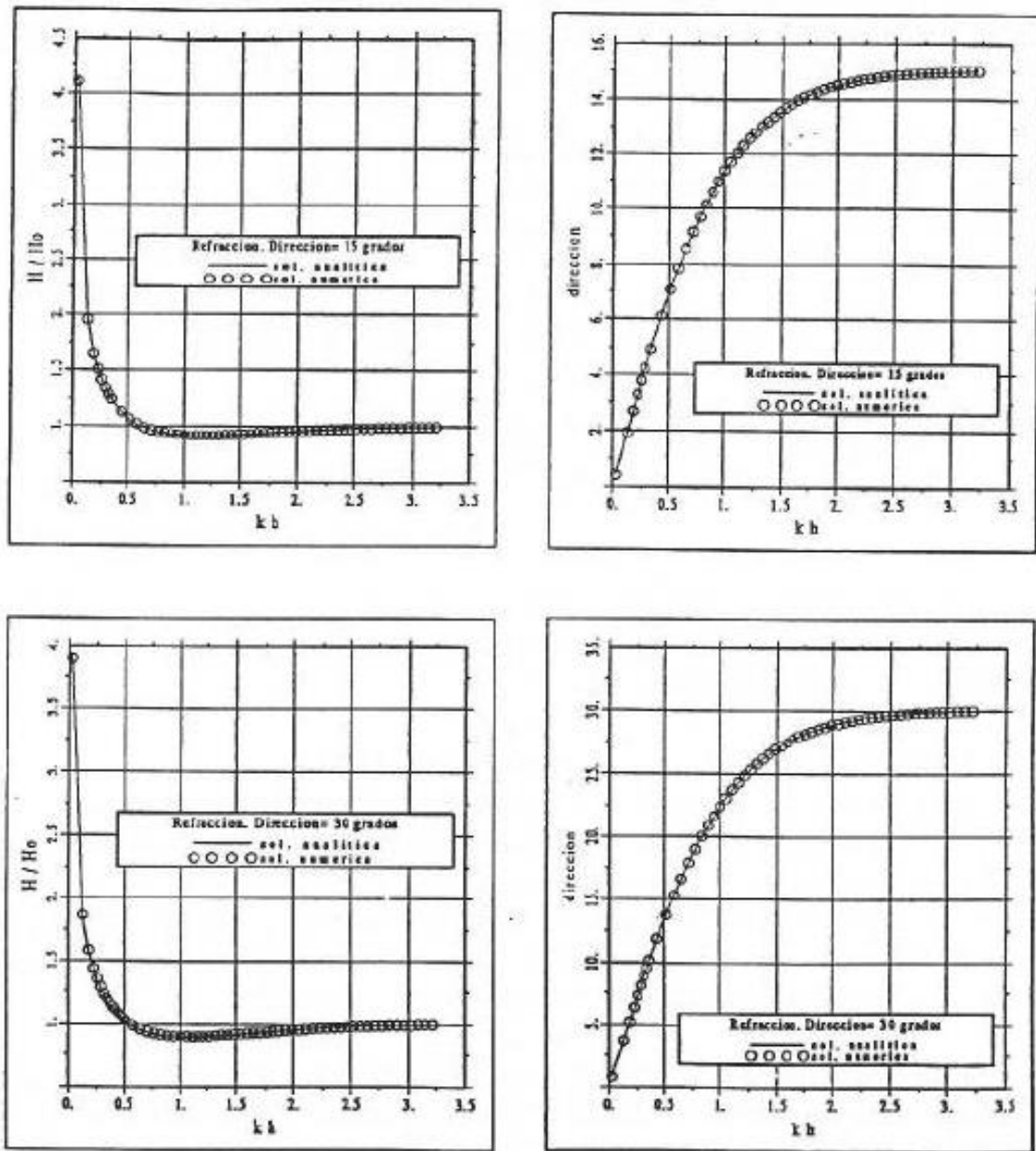


Figura 16 – Fenômeno de refração. Coeficiente de propagação e direção de propagação na profundidade relativa  $kh$ . Ângulos de incidência de 15 e 30 graus.

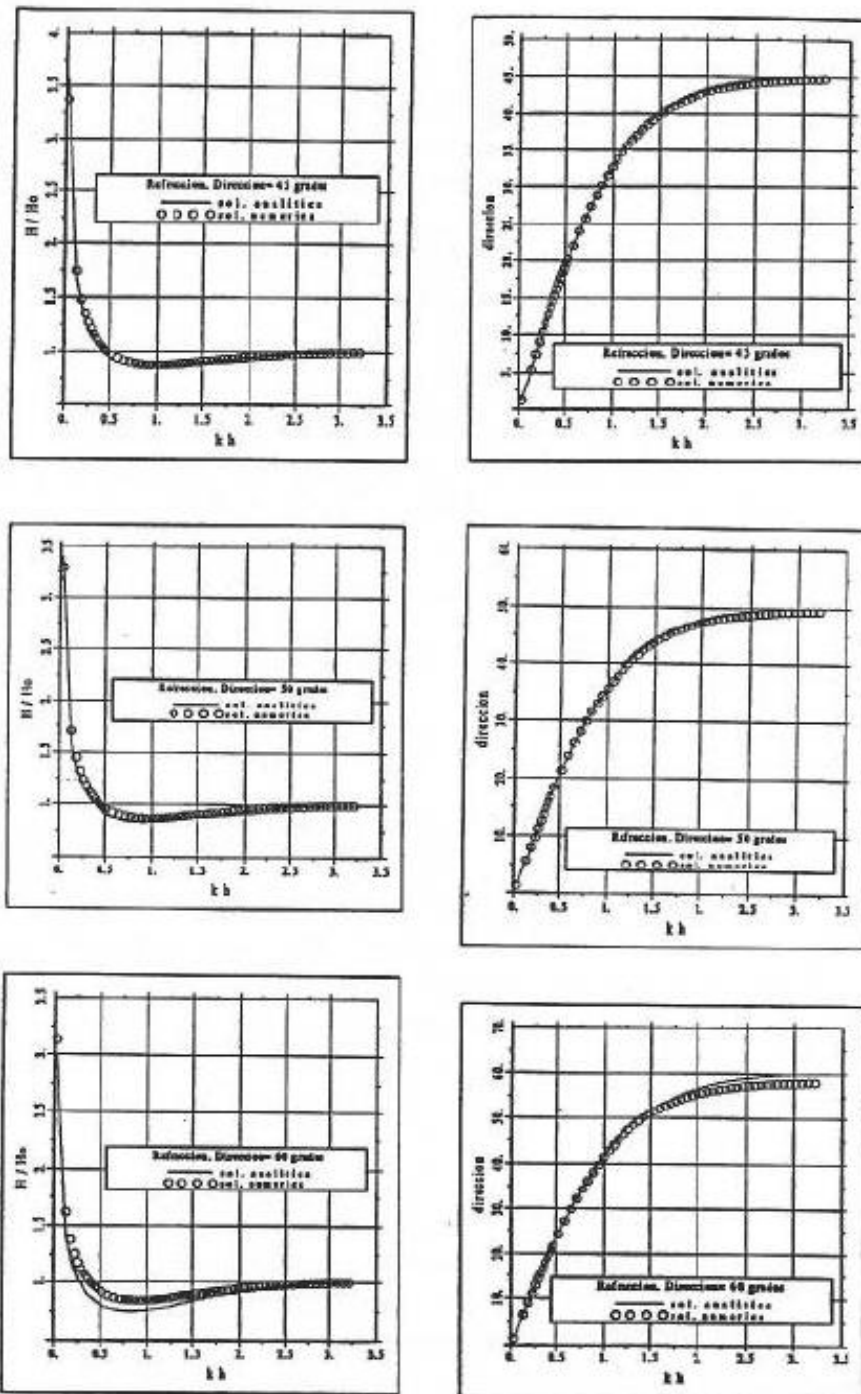


Figura 17 – Fenômeno de refração. Coeficiente de refração e direção de propagação em função de  $kh$ . Ângulos de incidência de 45, 50 e 60 graus.

- *Difração por obstáculo em fundo horizontal*

O fenômeno da difração é um fenômeno de transferência lateral de energia, que é produzida após um determinado obstáculo na propagação, que pode ser uma ilha ou um dique. Os efeitos produzidos pela difração são mudanças substanciais nas alturas de onda e direções de propagação nas imediações da área de água abrigada depois do obstáculo.

A solução teórica da difração depois de um obstáculo não costuma ser apresentada de forma analítica devido a sua complexidade, pois requer o uso de integrais de Fresnel (para conhecer a solução analítica pode ser consultado, por exemplo, Dean e Dalrymple (1991)), que devem ser resolvidos numericamente. Tal solução costuma ser mostrada mediante tabelas e gráficos em que são mostradas as isolinhas de difração em um determinado domínio, ou seja, as linhas que unem os pontos em que o coeficiente de difração  $K_0$  é o mesmo. Tais gráficos são conhecidos comumente de ábacos de Weggel (1972) por ter sido quem, pela primeira vez, apresentou os mesmos.

Desta forma, nas Figuras 18 a 22 são mostradas as isolinhas de difração produzidas depois de um obstáculo reto, semi-infinito, rígido e impermeável em um domínio com profundidade constante, para assim evitar a interferência dos fenômenos já calibrados, de empinamento e refração, onde a profundidade desempenha um papel básico. A legenda de cada isolinha representa o coeficiente de difração, que é a relação entre a altura de onda em cada ponto e a altura de onda incidente sobre o obstáculo.

Ainda que os Ábacos de Wiegel (1972) e os Ábacos do Exército Americano (U.S.Army) (CERC,1984) sejam adimensionais, no estudo da difração realizado com o modelo numérico foram consideradas diferentes relações  $h/L$  variando a profundidade e o período da onda. Assim, os casos que foram estudados são:

$$T = 3s \quad h = 10m \quad h/L = 0,712$$

$$T = 7s \quad h = 25m \quad h/L = 0,336$$

$$T = 10s \quad h = 5m \quad h/L = 0,074$$

Todos estes casos foram analisados para cinco diferentes ângulos de incidência:  $-30^\circ$ ,  $-15^\circ$ ,  $0^\circ$ ,  $15^\circ$  e  $30^\circ$ , que correspondem às Figuras 18 a 22, respectivamente.

---

Podem ser comprovados que os resultados numéricos são melhores para  $T = 7s$  e para  $T = 10s$ , ou seja, para relações  $h/L$  próximas às correspondentes para águas intermediárias e pouco profundas. Por outro lado, do mesmo jeito que ocorre nos ábacos de Wiegel, nas proximidades do extremo do dique é observado que a solução é altamente variável, já que em tal ponto os gradientes de altura de onda e de direção de propagação demonstraram ser muito grandes.

No que diz respeito ao ângulo de incidência sobre o dique, vale destacar a compatibilidade do modelo com os cinco casos estudados, embora em todos eles e, especialmente no caso  $\alpha = + 30^\circ$ , a área de sombra que se cria a sotavento do dique é a que apresenta os maiores erros. No entanto, o fenômeno de difração é suficientemente bem modelado pelo modelo OLUCA-MC.





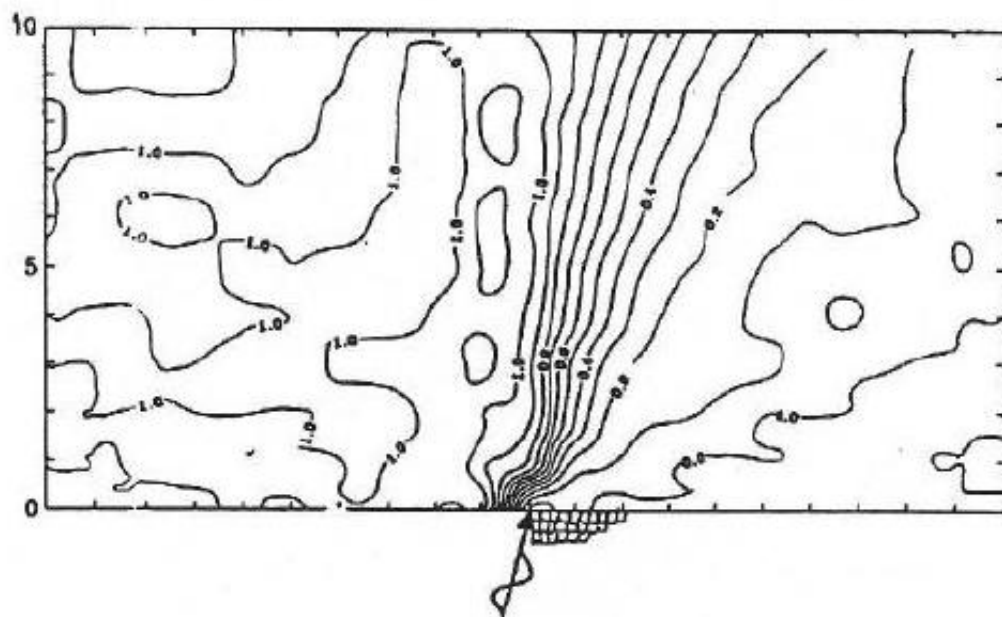
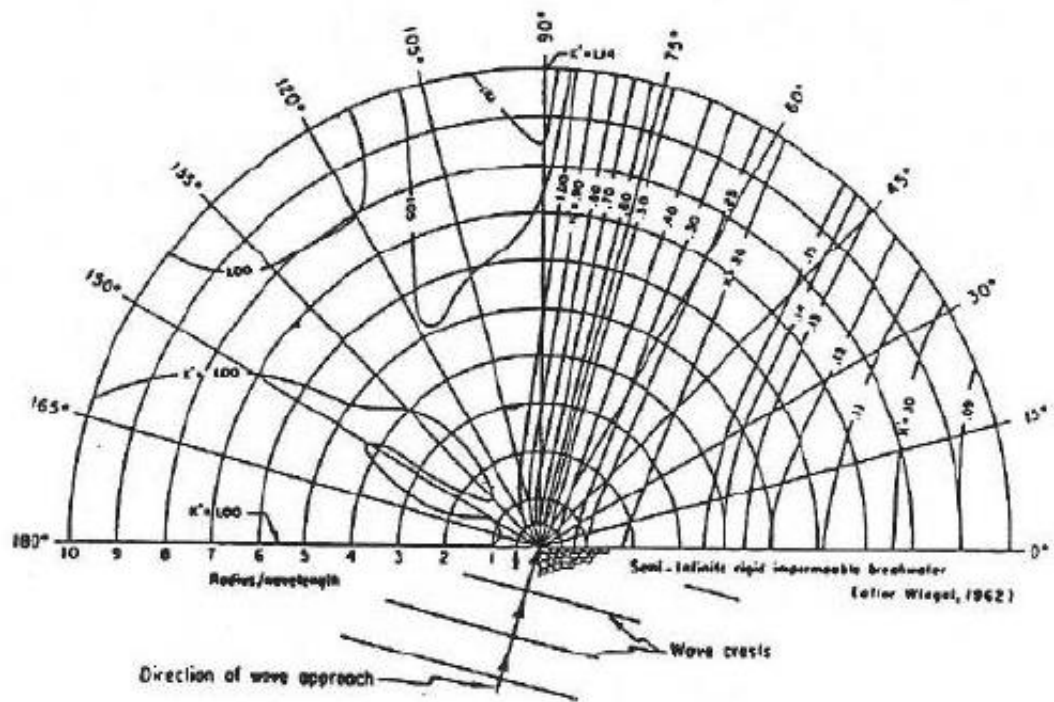


Figura 19 – Diagrama de difração das ondas. Comparação com a solução analítica. Ângulo de incidência:  $-15^\circ$ .

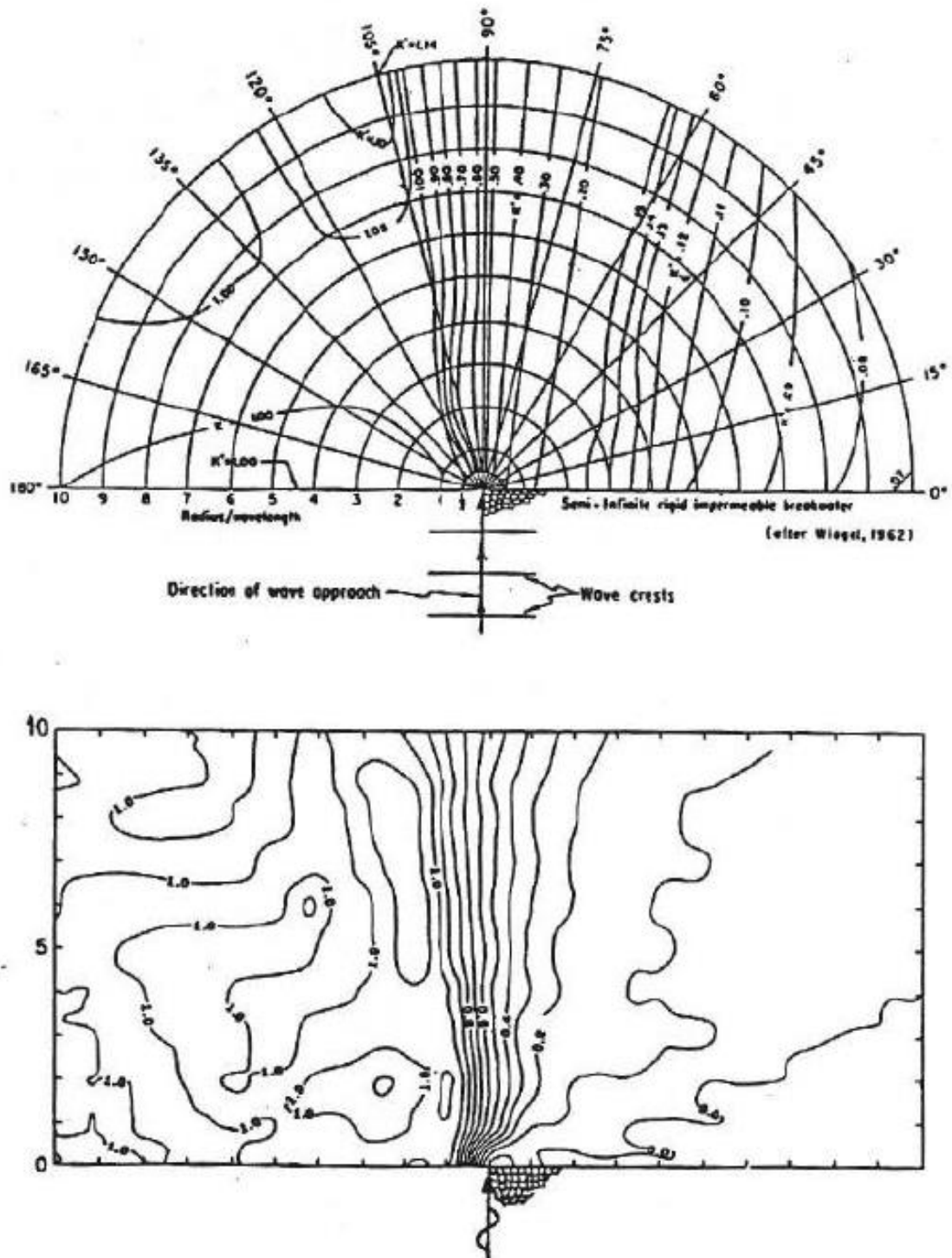


Figura 20 – Diagrama de difração das ondas. Comparação com a solução analítica. Ângulo de incidência: 0°.



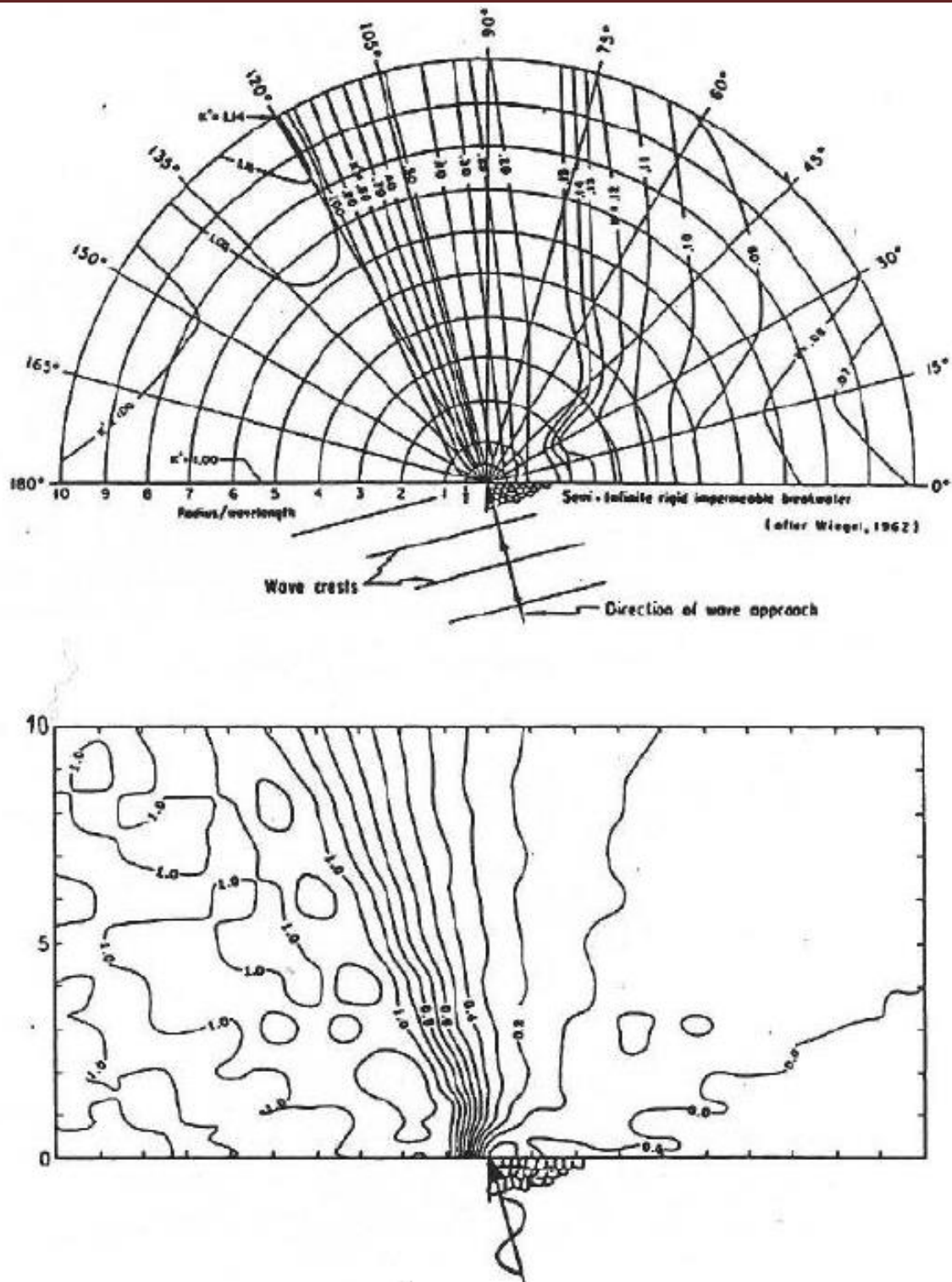


Figura 21 - Diagrama de difração de ondas. Comparação com a solução analítica. Ângulo de incidência: +15°.

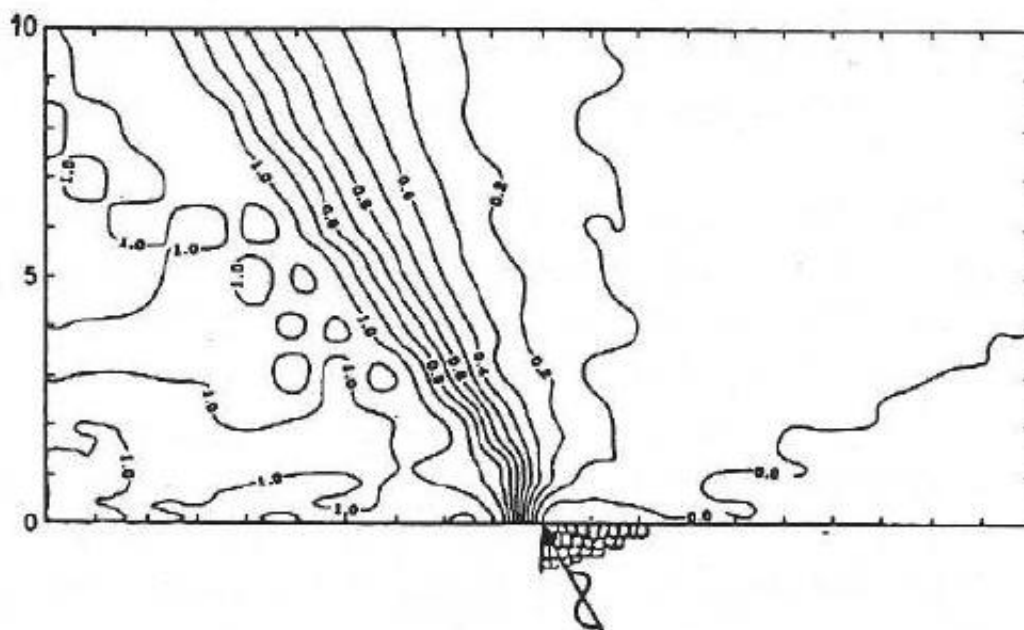
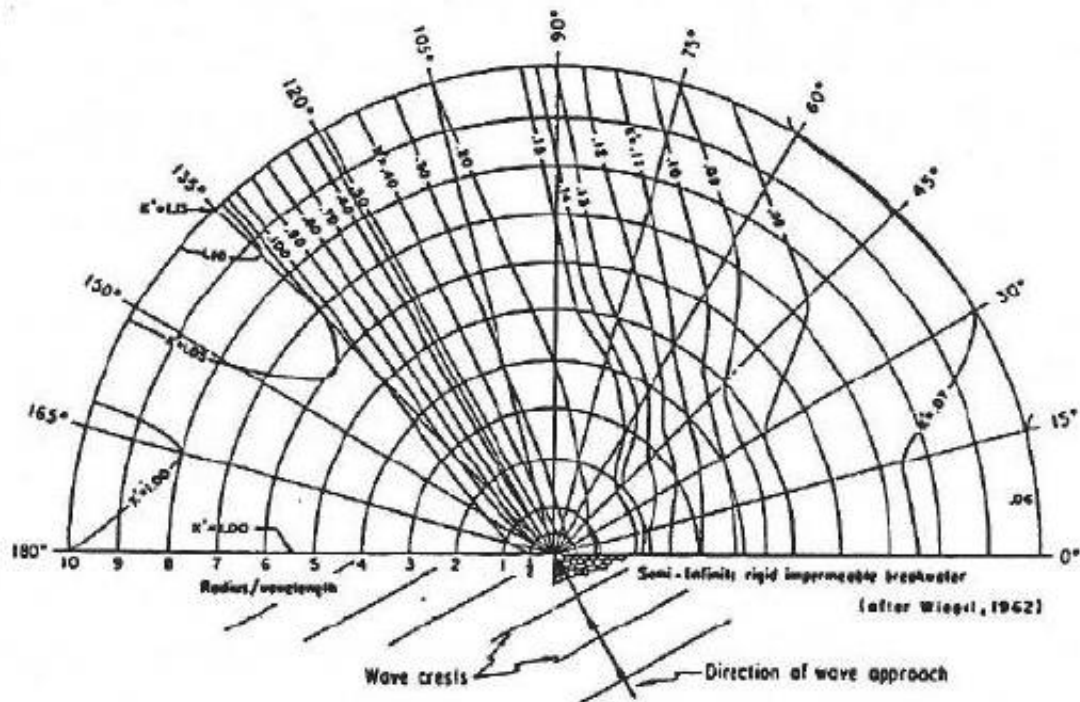


Figura 22 – Diagrama de difração das ondas. Comparação com a solução analítica. Ângulo de incidência: +30°.

- *Quebra das ondas*

A quebra das ondas é um dos fenômenos mais significativos da hidrodinâmica costeira, a qual é produzida quando a altura da onda é aproximadamente igual à profundidade. Durante a quebra das ondas têm lugar complexos fenômenos físicos e dinâmicos, tais como uma rápida mudança de forma das ondas e a transformação de energia das ondas em turbulência.

O estudo da quebra das ondas, como já foi indicado anteriormente, não se limita ao cálculo da altura da onda e a profundidade em que se quebra, mas também ao cálculo da energia dissipada e a descrição do fenômeno de recomposição.

O modelo de quebra incorporado no código numérico do OLUCA-MC, o qual inclui tanto o início da quebra quanto a dissipação de energia que é produzida no interior da zona de surfe, foi calibrado e verificado por Dally, Dean e Kuo (1966). Além disso, o modelo de dissipação de energia é especialmente recomendado em um trabalho sobre modelos de simulação da quebra das ondas, apresentado por Southgate (1993).

Com o objetivo de contrastar tal modelo de quebra, dado que o modelo de propagação é válido para ondas irregulares, foi adotado como base para a comparação dos resultados numéricos, um conjunto de dados de laboratório apresentado por Stive (1985), obtidos com ondas irregulares.

O programa de medidas realizado consistiu em testes em um canal de ondas: um primeiro teste em um canal de grande escala e um segundo teste em um canal de pequena escala (Figura 23). As dimensões de cada um dos canais eram (Quadro 2):

Quadro 2 – Dimensões dos canais testados.

	Grande Escala	Pequena Escala
<b>Comprimento</b>	233 m	55 m
<b>Largura</b>	5 m	1 m
<b>Altura</b>	7 m	1 m
<b>Declividade</b>	2,5%	2,5%

As condições de ondas incidentes eram as seguintes (Quadro 3):

Quadro 3 – Condições das ondas incidentes nos canais testados.

	Grande Escala	Pequena Escala
$H_0$	1,2 m	0,15 m
$\alpha_0$	0°	0°
$T$	5 segundos.	1,79 segundos.
$d_0$	4,19 m	0,70 m

Para poder comparar ambos os resultados em uma mesma escala gráfica, a correspondência entre as condições das ondas de cada teste foi baseada na esbelteza da onda no ponto de início da quebra  $H_b/L_b$  (STIVE, 1985). Desta forma, a relação que foi obtida a partir dos dados do teste foi:

$$\frac{d_{gran}}{d_{peq}} = \frac{L_{gran}}{L_{peq}} = \frac{H_{b_{gran}}}{H_{b_{peq}}} = 8,3$$

Na Figura 24 podem ser comparadas as medidas experimentais com os resultados do modelo. Como podem ser observados, os resultados do modelo são ajustados muito bem aos dados experimentais, sobretudo para o teste em pequena escala. Para o teste em grande escala, o modelo não chega a reproduzir fielmente o ponto de início da quebra (valor máximo de  $H$  no gráfico), embora seja importante destacar certa dispersão das medidas experimentais.

O gráfico anterior indica uma variação da altura de onda bastante aproximada a dos testes, com uma dissipação inicial intensa depois do ponto de quebra e uma dissipação posterior a algo mais suave.

Por último, dentro das limitações do modelo de quebra vale assinalar que este não inclui as variações do nível médio provocadas pelas ondas, tais como o “*setup*” e o “*setdown*”. Em particular, as variações devidas ao “*setup*” são importantes na zona de arrebatção, pois podem alcançar valores relativos de 10-20% com relação à altura da onda.

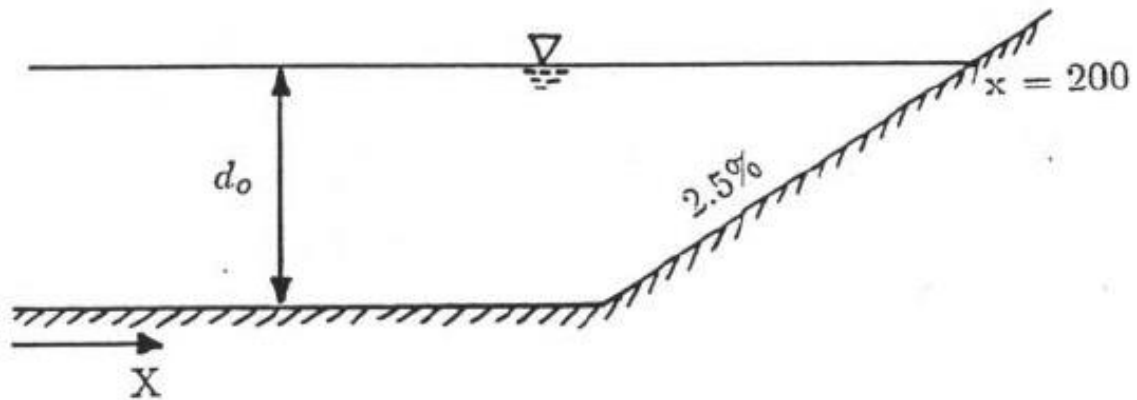


Figura 23 – Geometria do domínio. Calibração da quebra de onda.

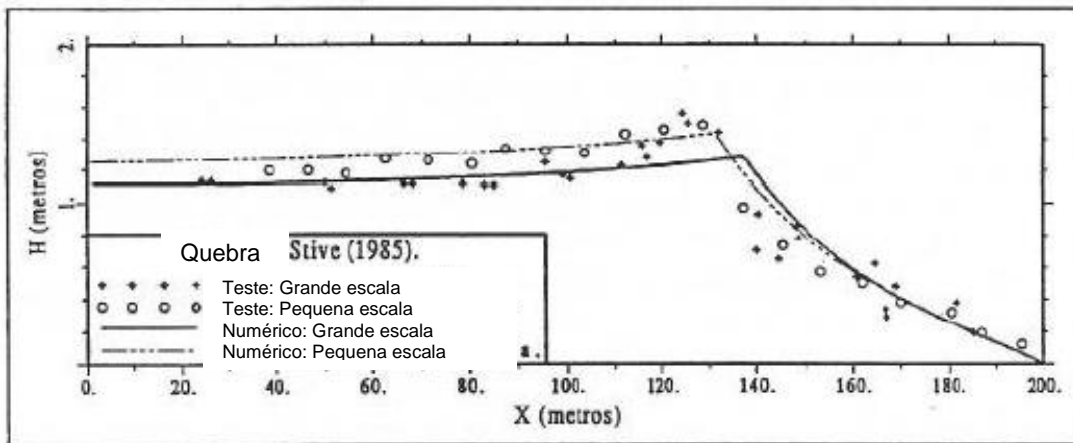


Figura 24 – Resultados para o teste de quebra da onda. Perfil de altura de onda em função da distância da costa.

### 5.3 Fenômenos de propagação (refração-difração) em um teste físico

Nesta seção são comparados os resultados experimentais obtidos a partir de um modelo reduzido com os resultados numéricos do modelo de propagação. As medidas experimentais foram obtidas de um teste realizado por Berkhoff (1982), muito similar ao realizado por Ito Tanimoto (1972).

O modelo reduzido envolvia uma batimetria com um banco ou “*shoal*” elíptico situado em um fundo plano com declividade de 2% (1:50). No contorno inicial, de onde vinha à onda, a profundidade era de 0,45m e no contorno final do teste existia uma praia, de forma que a energia propagada era dissipada quase totalmente pelo



---

processo de quebra das ondas. Na Figura 25 pode ser observado um esquema da batimetria e a localização de cada uma das seções onde foram tomadas as medidas. Uma descrição analítica detalhada da batimetria pode ser encontrada em Kirby e Dalrymple (1986a).

Este teste calibrado descrito anteriormente foi escolhido por várias razões:

- Dispõe de um completo conjunto de medidas experimentais rigorosamente controladas no laboratório para este caso (BERKHOF, 1982; BERKHOF; BOOIJ; RADDER, 1982);
- O domínio apresentado dá lugar a cóusticos e, portanto, produz o cruzamento de ortogonais; caso se utilize métodos de refração por raios. Em consequência, os resultados numéricos do modelo OLUCA-MC mostrarão a utilidade do mesmo em casos onde é necessário considerar o efeito combinado de refração - difração; e
- O exemplo é útil também para comprovar as diferenças entre o modelo linear e os modelos não lineares de Stokes e de Dalrymple composto.

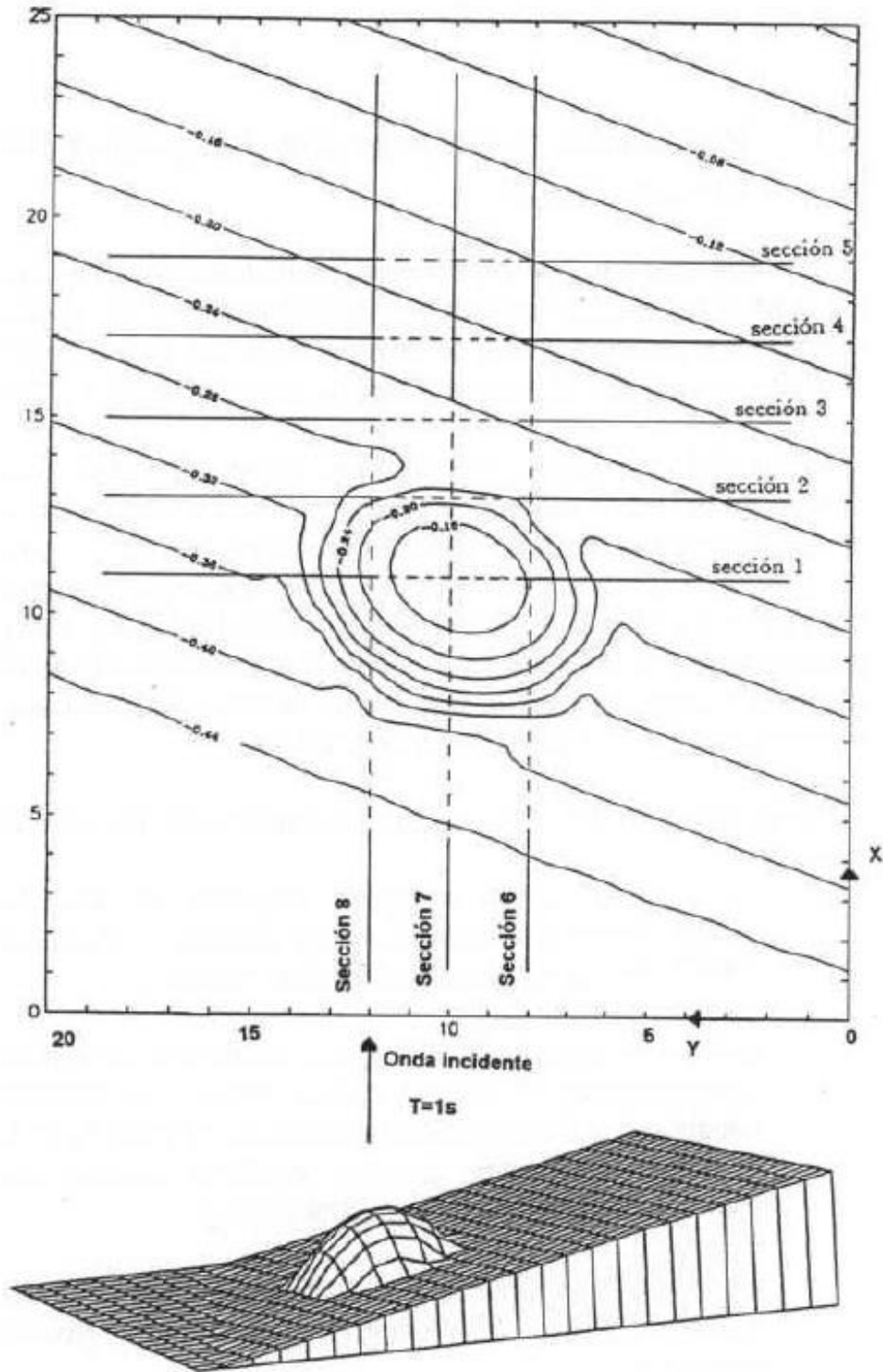


Figura 25 – Batimetria do teste de Berkhoff (1982), perspectiva 3D.

O domínio numérico consistiu em uma malha retangular de dimensões 25m x 20m segundo o eixo X e o eixo Y, respectivamente. A linha de máxima declividade do plano inclinado forma um ângulo de 20° com o eixo X. Os espaçamentos  $dx$  e  $dy$  foram iguais:  $dx = dy = 0,25m$ , com 101 x 81 nós de cálculo em X e em Y, respectivamente.

As condições iniciais das ondas foram as mesmas que no teste:  $H_0 = 0,0464m$ ,  $T = 1s$  e  $\alpha = 0^\circ$  em relação ao eixo X da malha de cálculo. As condições laterais de contorno escolhidas foram as correspondentes a contornos abertos, que permitem a transmissão parcial das ondas através do contorno. A largura da malha é suficiente (aproximadamente 13 vezes o comprimento da onda na primeira linha do domínio) para que os resultados no interior da malha não sejam distorcidos devido às condições de contorno.

A localização das seções das medidas experimentais foi a seguinte:

Quadro 4 – Localização das seções das medidas experimentais.

<b>Seção 1</b>	$x = 11 \text{ m}$	$5,0 \leq y \leq 15,0 \text{ m}$
<b>Seção 2</b>	$x = 13 \text{ m}$	$5,0 \leq y \leq 15,0 \text{ m}$
<b>Seção 3</b>	$x = 15 \text{ m}$	$5,0 \leq y \leq 15,0 \text{ m}$
<b>Seção 4</b>	$x = 17 \text{ m}$	$5,0 \leq y \leq 15,0 \text{ m}$
<b>Seção 5</b>	$x = 19 \text{ m}$	$5,0 \leq y \leq 15,0 \text{ m}$
<b>Seção 6</b>	$y = 18 \text{ m}$	$10,5 \leq x \leq 20,5 \text{ m}$
<b>Seção 7</b>	$y = 10 \text{ m}$	$10,5 \leq x \leq 20,5 \text{ m}$
<b>Seção 8</b>	$y = 12 \text{ m}$	$10,5 \leq x \leq 20,5 \text{ m}$

Com estas características do teste, foram utilizados três diferentes modelos possíveis em função da escolha do termo não linear.

- Modelo linear;
- Modelo de Stokes; e
- Modelo composto de Kirby e Dalrymple.

Há que destacar que, ainda que nas últimas linhas do domínio não seja cumprida a condição do número de Ursell para admitir a validade do modelo de Stokes, válido para  $U_r = \frac{H}{k^2 h^3} < 1$ , este de fato é válido na região de principal interesse. E, por isso, foi considerado adequado comparar seus resultados com os dos

---

outros dois modelos. Uma calibração similar a esta já foi realizada por Kirby e Dalrymple (1984).

Os resultados dos três diferentes modelos para as seções 1 - 8 podem ser vistos nas Figuras 26 a 28. Tais figuras, que comparam os resultados numéricos com os dados experimentais, mostram a utilidade de incluir o termo não linear. Com um modelo de refração de raios seria impossível calcular a altura da onda atrás do banco, devido a que as ondas se concentram ao refratarem-se por ambos os lados do “*shoal*”, aparecendo uma zona de cáusticos e de cruzamento de raios. No entanto, utilizando um modelo de refração-difração, é possível modelar tal área de concentração energética, já que a difração reduz o efeito de acumulação de energia que será produzida considerando somente o fenômeno de refração.

Contudo, como também pode ser observado, o modelo de refração-difração linear tende a calcular por excesso os picos de altura de onda nas áreas de concentração de energia (por exemplo, as seções 4 e 7), onde a esbeltez da onda é grande e os efeitos não lineares são importantes. Por esta razão, examinando as Figuras 26 a 28 pode ser concluído que os resultados numéricos para os modelos não lineares são melhores que para o modelo linear, principalmente quando as variações transversais da altura da onda são importantes, como na seção 5.

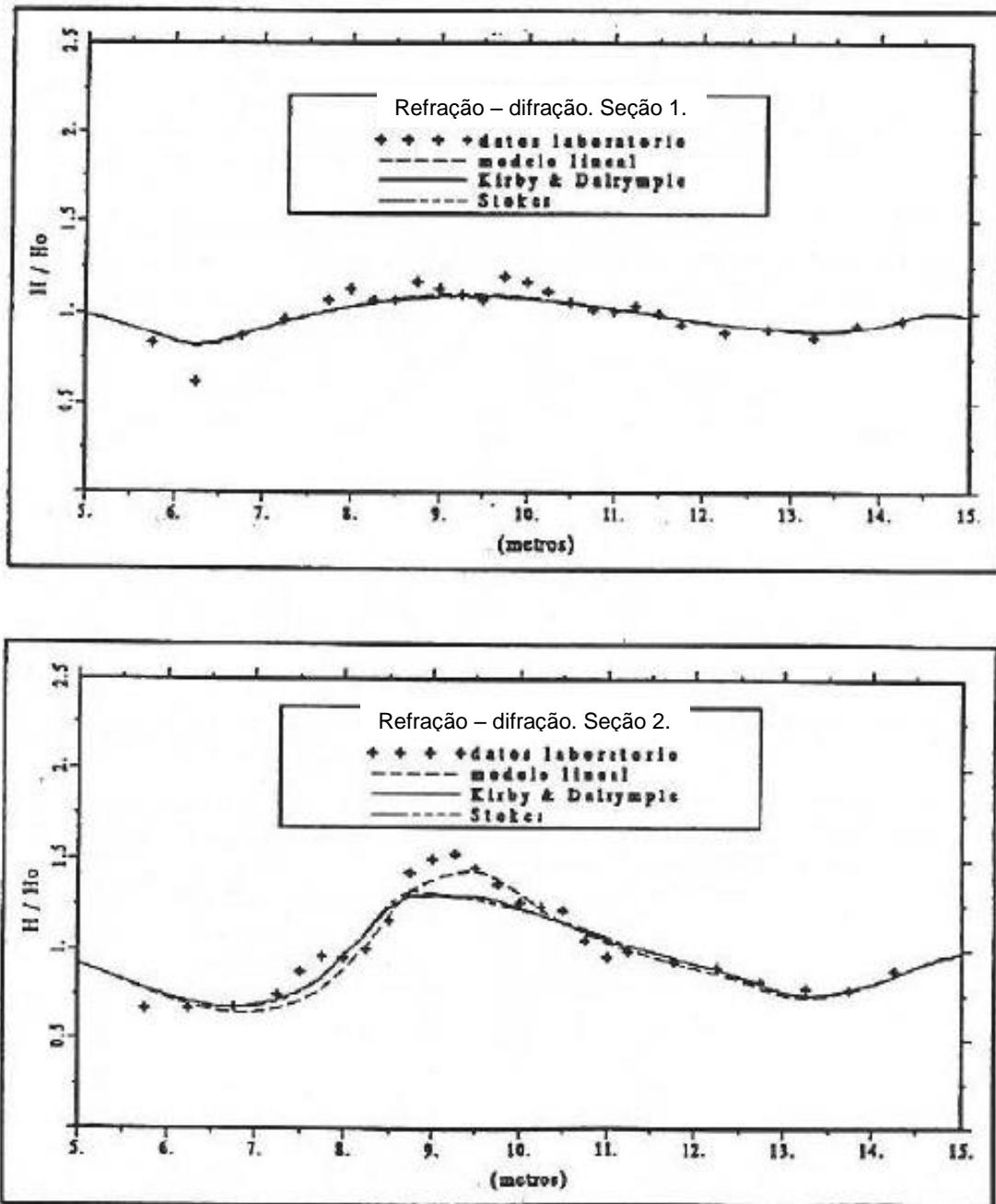


Figura 26 – Comparação de resultados experimentais e numéricos para as seções 1 e 2.

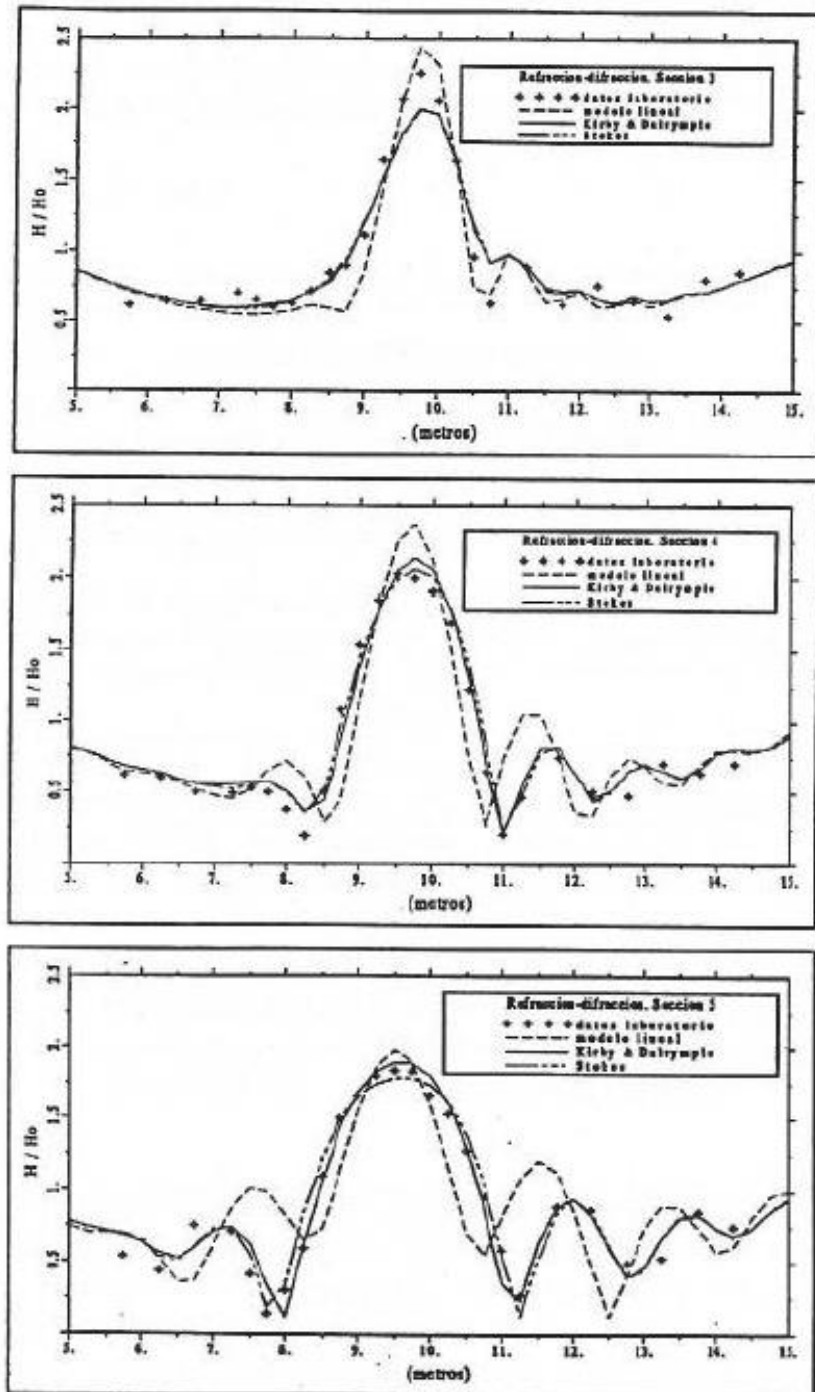


Figura 27 – Comparação de resultados experimentais e numéricos para as seções 3, 4 e 5.

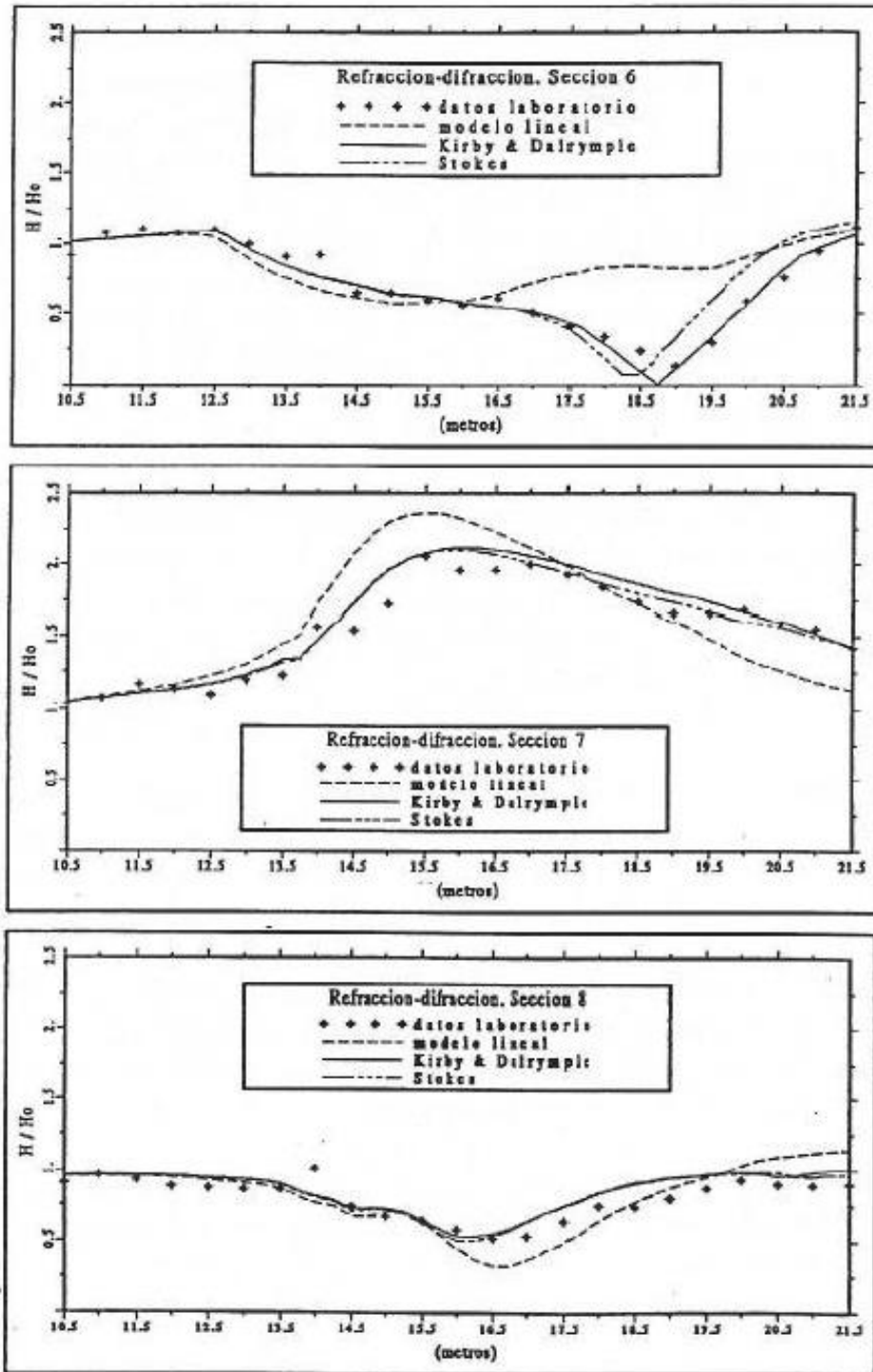


Figura 28 – Comparação de resultados experimentais e numéricos para as seções 6, 7 e 8.

Analisando as diferentes áreas, pode ser observado que na seção 1, os efeitos de concentração de energia ainda não são aparentes e há pouca diferença entre os



três modelos. As seções 2 e 3 mostram a região de desenvolvimento cáusticos. Em ambas as seções, os modelos não lineares preveem por padrão a altura de onda máxima em quase 10%. No entanto, nas seções 4 e 5, onde as ondas já atravessaram o pico da zona de cáusticos, os modelos não lineares preveem com grande exatidão tanto a altura de onda quanto a largura do cruzamento de ortogonais e a forma dos lóbulos laterais provocadas pela difração.

Por sua vez, a similaridade de resultados nas seções longitudinais 6, 7 e 8 entre os modelos não lineares e os dados experimentais é também muito boa. Na seção 7, no centro do pico da zona de cáusticos, os modelos não lineares preveem tanto a altura de onda no pico quanto o desvanecimento desta ao aproximar-se da costa. Na seção 6 é produzida uma grande diferença entre o modelo linear e os modelos não lineares, já que estes preveem com grande precisão o valor mínimo da altura de onda. Esta seção é a mais concludente para mostrar a utilidade dos modelos não lineares perante o modelo linear.

Após analisar estes resultados em seu conjunto, fica evidente que a aproximação dos modelos não lineares é superior a do modelo linear, exceto no início da formação dos cáusticos, o qual pode dever-se à limitação do modelo para permitir uma rápida concentração das ondas.

A diferença entre os dois modelos não lineares é quase imperceptível devido à validade do modelo de Stokes na região onde se comparam. Ambos são comparados, embora seja certo que os resultados na seção 6 possam orientar a escolha para o modelo composto de Kirby e Dalrymple (1984).

Finalmente, na Figura 29 são mostradas as isolinhas de agitação relativa em todo o domínio estudado, com base nos resultados do modelo não linear de Kirby e Dalrymple (1984).



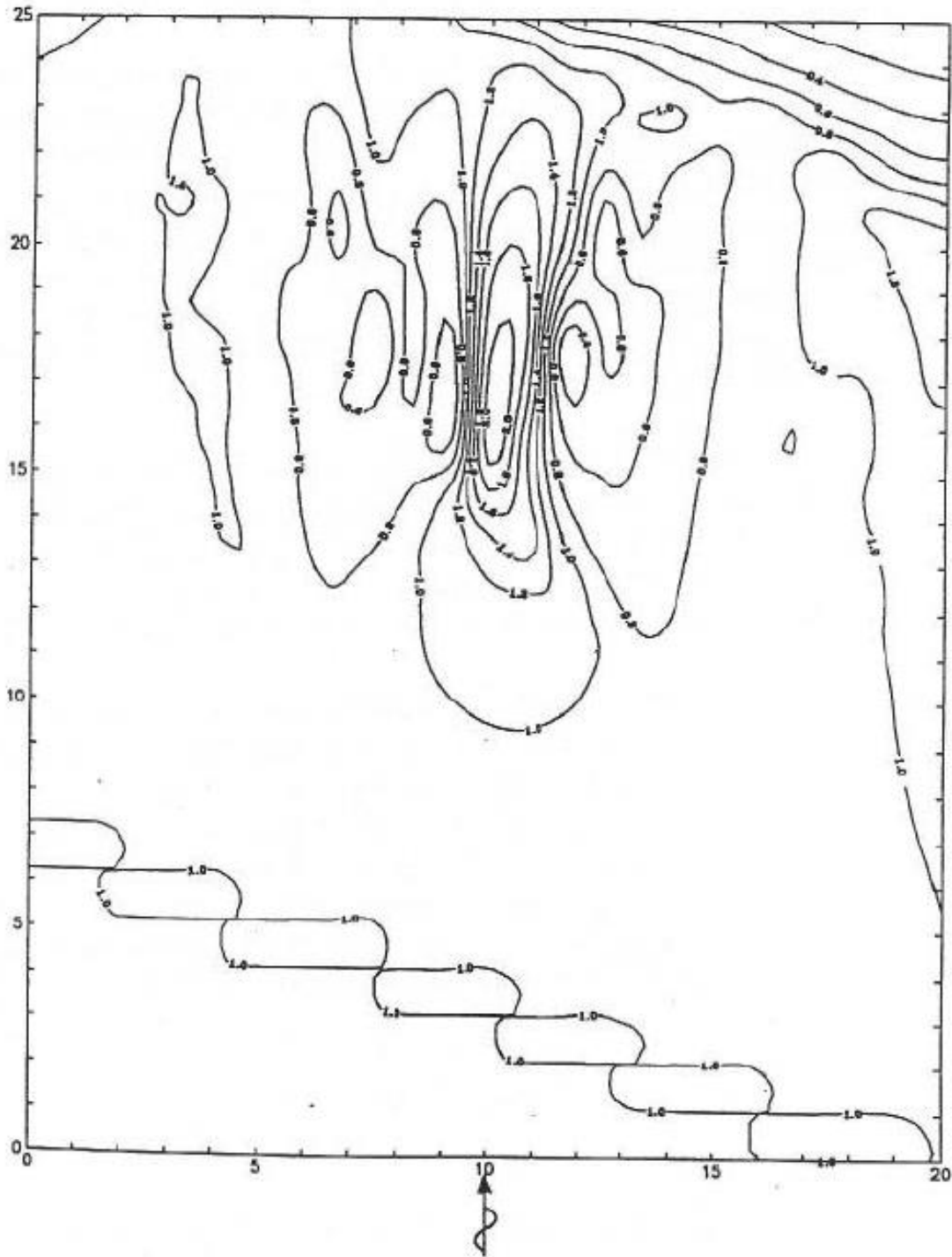


Figura 29 – Altura de onda relativa à altura de onda incidente em todo o domínio. Modelo linear composto de Kirby e Dalrymple (1984).

### 5.4 Fenômenos de propagação, interação onda-corrente

Foi aplicado o modelo a um caso idealizado proposto por Arthur (1950). Nele, é suposta uma onda que incide ortogonalmente em uma praia com fundo plano inclinado e interage com uma corrente de retorno (“*rip-current*”) estacionária que flui até mar adentro. Este teste foi utilizado por Arthur (1950) para ilustrar os efeitos das correntes e das mudanças na batimetria nos resultados obtidos com um modelo de propagação de raios. No entanto, este teste serve também como exemplo para mostrar a utilidade de um modelo de refração-difração nos casos em que, com um modelo de raios, é obtido um cruzamento de ortogonais.

Para comparar os resultados numéricos, foram utilizados os resultados obtidos com outros dois modelos de propagação baseados na equação para declividade suaves: um do tipo elíptico desenvolvido por Kostense, Dingemans e Van de Bosch (1988) e outro modelo desenvolvido por Rodríguez (1993) baseado na equação eikonal e na equação de conservação da ação da onda.

O domínio de propagação utilizado para modelar o teste de Arthur (1950) foi uma malha retangular de 260m x 120m na direção  $X$  e  $Y$ , respectivamente, com uma declividade de 2% e uma profundidade inicial de 5,24m (Figura 30). Arthur (1950) descreveu o domínio de forma que a onda incidiu ortogonalmente à linha da costa em uma área onde a corrente foi praticamente nula. Além disso, as dimensões da malha e os espaçamentos entre nós ( $dx = 2m$  e  $dy = 4m$ ) foram iguais às da calibração realizada por Rodríguez (1993) para poder comparar os resultados diretamente.

O campo de velocidades que descreve a corrente de retorno é o seguinte:

$$\vec{U} = (U, V)$$

$$U = -0,1442(260 - x)F\left(\frac{260 - x}{76,2}\right)F\left(\frac{y}{7,62}\right)$$

$$V = -1,09728\left[2 - \left(\frac{260 - x^2}{76,2}\right)\right]F\left(\frac{260 - x}{76,2}\right)\int_0^{\frac{y}{7,62}} F(t)dt$$

Onde:

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

Na Figura 31 é possível observar os perfis de velocidade  $U$ ,  $V$  variando em  $x$  e  $y$ . As condições de ondas incidentes são (KOSTENSE; DINGEMANS; VAN DEN BOSCH, 1988):

$$H = 0,2 \text{ m} \quad T = 8 \text{ segundos} \quad \alpha = 0^\circ$$

Na Figura 32 pode ser comprovado como, aplicando um modelo de propagação de raios, aparecem cáusticos nos pontos de interseção dos raios, visto que tal modelo apresenta indefinição em tais pontos.

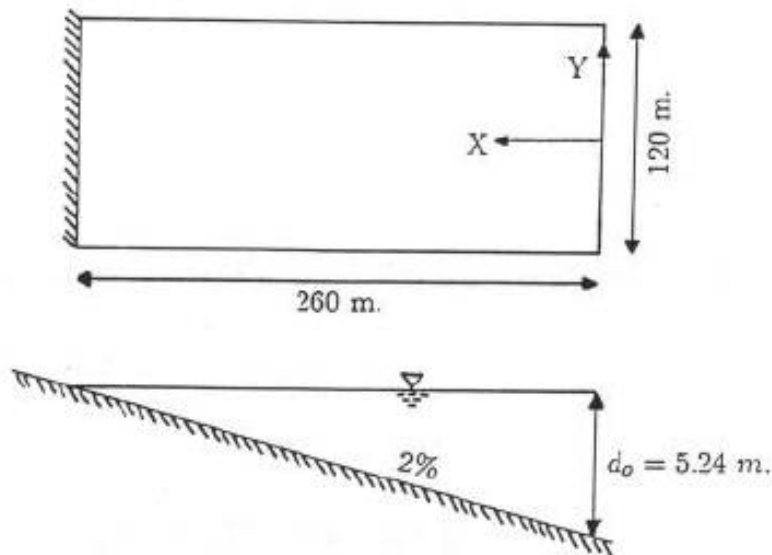


Figura 30 – Domínio de propagação. Caso de Arthur.

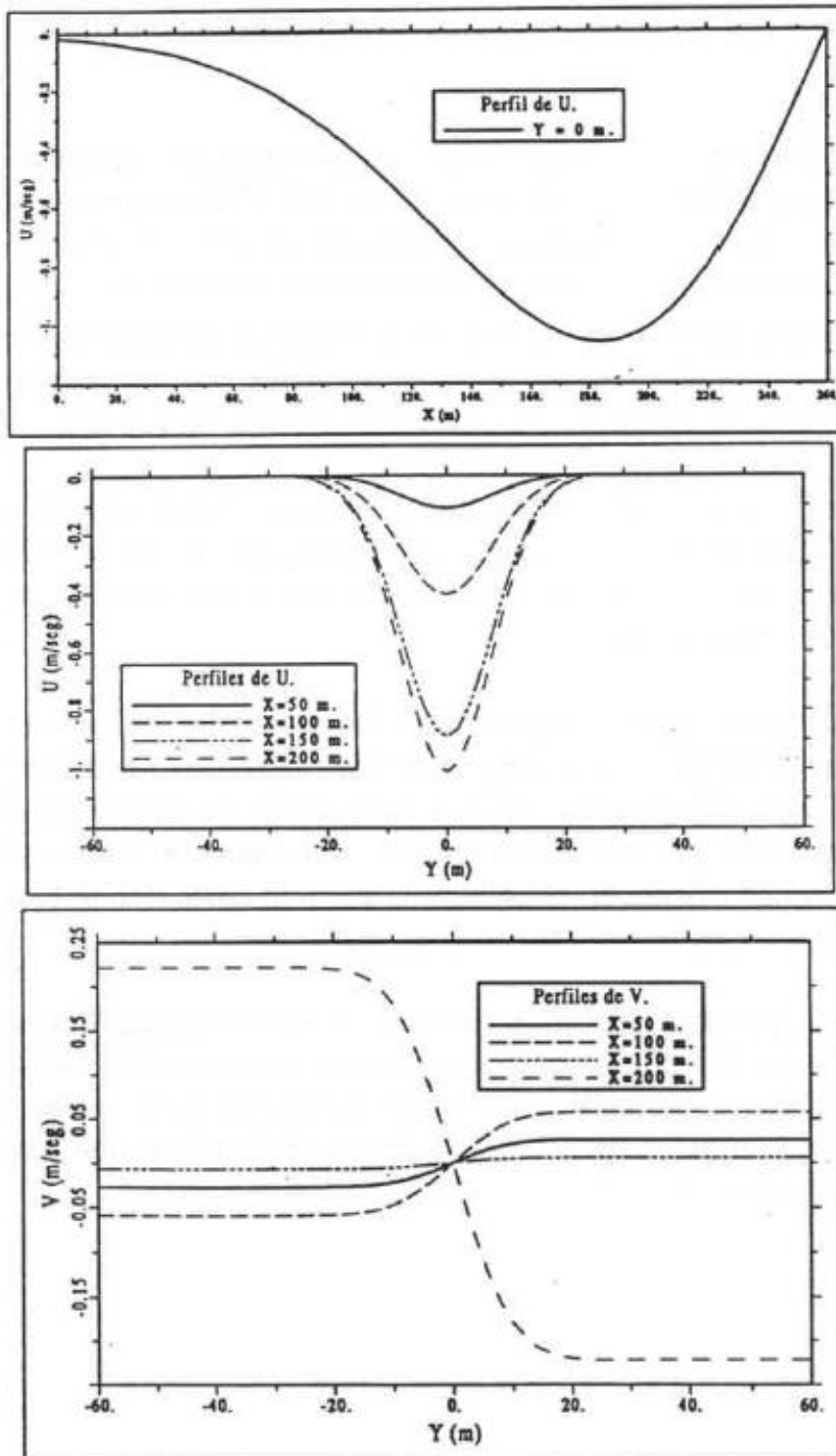


Figura 31 – Perfis característicos da corrente de retorno.

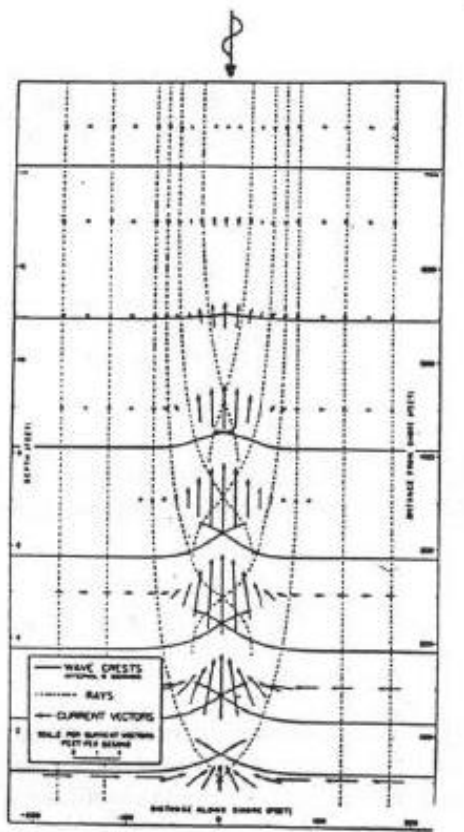


Figura 32 – Representação vetorial da corrente de retorno. Resultados para um modelo de propagação de raios (ARTHUR, 1950).

No entanto, nas Figuras 33 e 34 pode ser observado como os modelos desenvolvidos por Kostense, Dingemans e Van Den Bosch (1988) e por Rodríguez (1993) preveem alturas de onda finitas nas áreas de concentração de energia.

Da mesma forma, na Figura 34 são mostradas as isolinhas de alturas de onda obtidas a partir do modelo OLUCA-MC. Comparando os resultados com os obtidos pelos modelos anteriores pode ser observado que não diferem significativamente. As maiores diferenças são observadas na área próxima à costa, onde a componente  $V$  da corrente de retorno  $U$  é maior. Isto se deve porque o modelo parabólico com corrente não reproduz corretamente a interação com correntes transversais.

Em vista dos resultados obtidos, pode ser concluído que o modelo desenvolvido reproduz com bastante precisão a interação com correntes  $U$  paralelas à direção de propagação de ondas, mas não a interação com correntes transversais  $V$ .

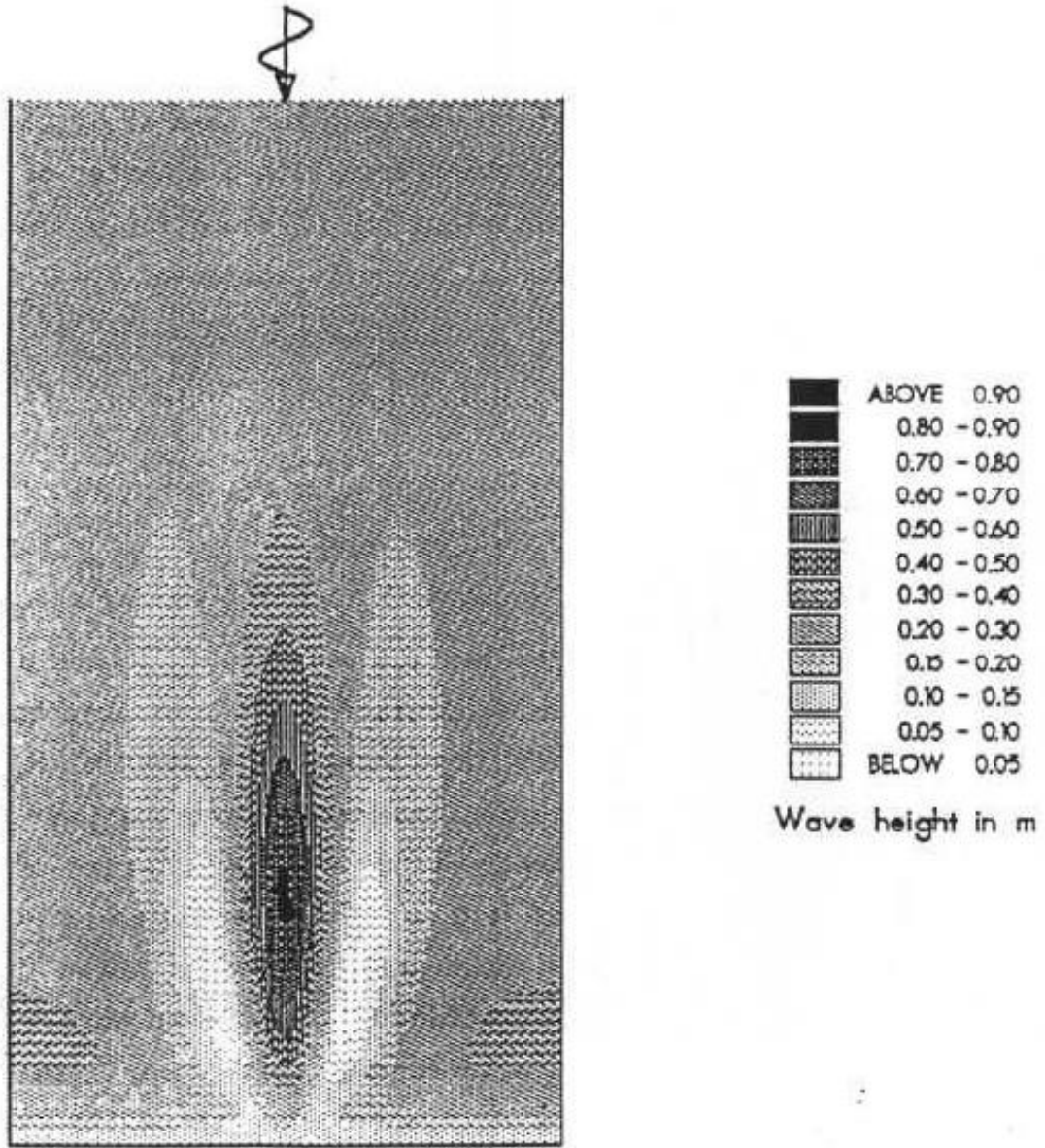


Figura 33 – Distribuição de alturas de ondas obtidas por Kostense, Dingemans e Van de Bosch (1988).



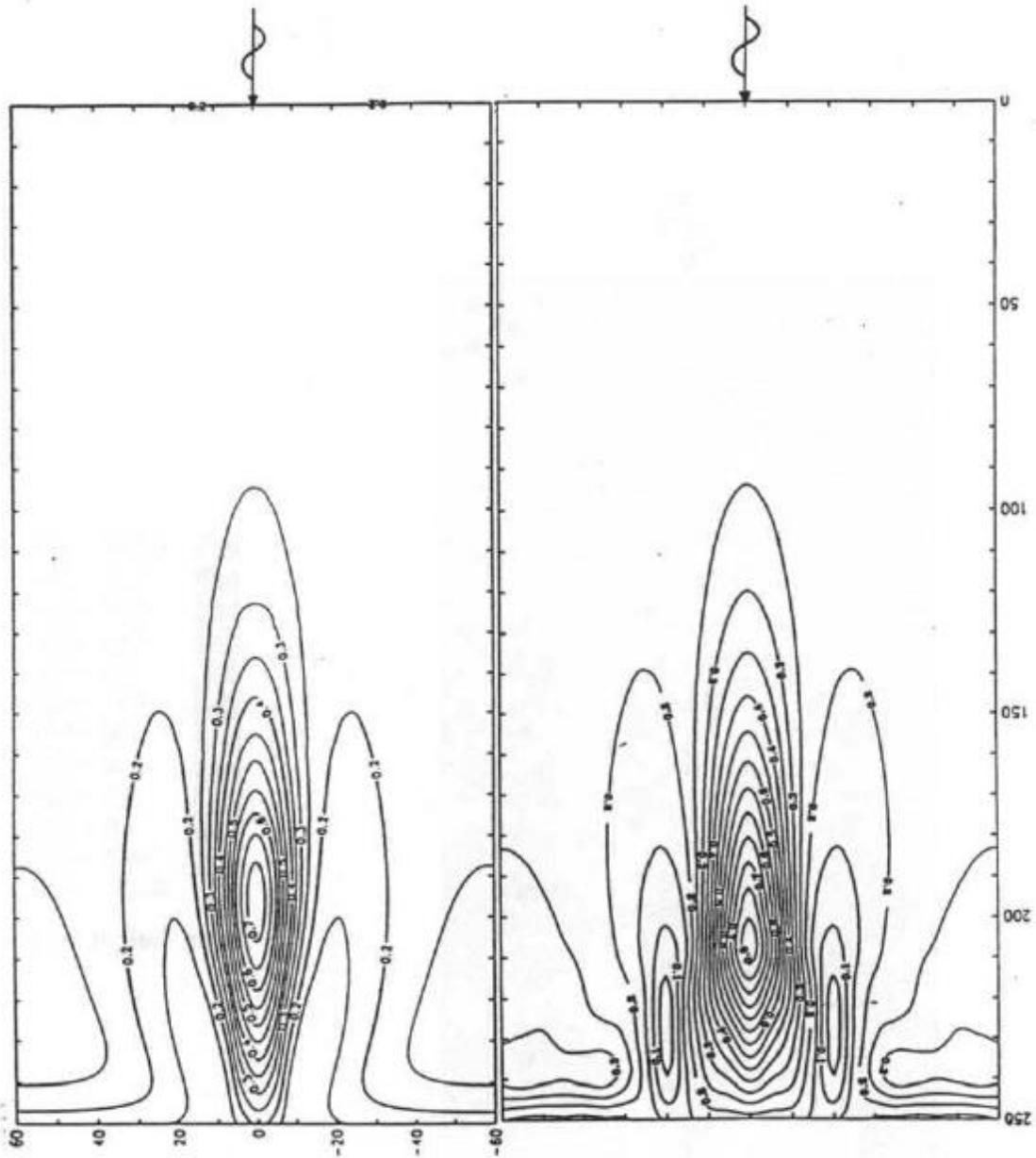


Figura 34 – Isolinhas de altura de onda obtidas por Rodríguez (1993), esquerda. Isolinhas de nível de altura de onda obtidas pelo modelo OLUCA-MC, direita.

Finalmente, para comparar com os resultados do modelo desenvolvido por Rodríguez (1993) são incluídos na Figura 35 os resultados da propagação de ondas oblíquas ( $\alpha = +30^\circ$ ), mantendo os demais parâmetros de ondas e de corrente iguais ao caso anterior. Novamente, os resultados diferem de algo mais sensivelmente na área próxima à costa onde a componente  $V$  da corrente de retorno se faz mais intensa.

Segundo testes realizados com o modelo parabólico de García (1994), para um caso de fundo plano, com corrente transversal  $V$  e as ondas propagando-se perpendicular à corrente, o erro é grande na altura de onda devido à simplificação inerente à aproximação parabólica, que considera que a onda se propaga preferencialmente na direção do eixo  $x$ .

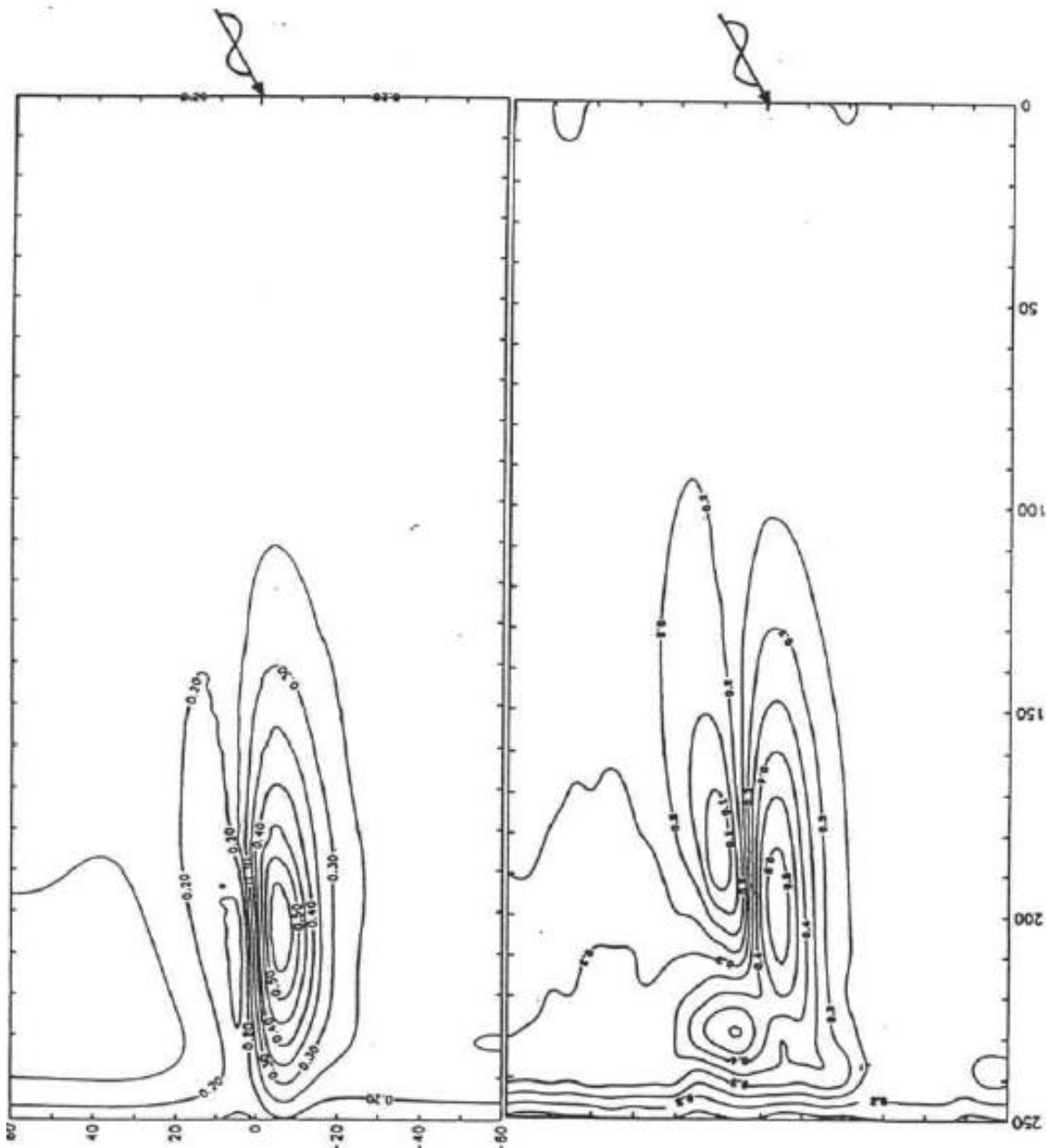


Figura 35 – Isolinhas de alturas de onda para incidência +30 graus. Esquerda: Rodríguez (1993). Direita: modelo OLUCA-MC.



**REFERÊNCIAS**

---

ARTHUR, R. S. Refraction of Shallow Water Waves: the Combined Effects of Currents e Underwater Topography. **Transactions American Geophysical Union**, v.31, n.4, p. 549-552, 1950.

BERKHOFF, J.C.W. Computation of Combined Refraction-Diffraction. In: International Conference on Coastal Engineering, 13, 1972. **Proceedings...** ASCE, Vancouver, p. 471-490, 1972.

BERKHOFF, J.C.W. Verification Computations with Linear Wave Propagation Models. Delft Hydraulics Laboratory, **Report W 154-VIII**, 1982.

BERKHOFF, J.C.W.; BOOIJ, N.; RADDER, A.C. Verification of Numerical Wave Propagation Models for Simple Harmonic Linear Waves. **Coastal Engineering**, v.6, p.255-279, 1982

BETTES, P.; ZIENKIEWICZ, O.C. Diffraction e Refraction of Surface Waves Using Finite e Infinite Elements. **Int. J. for Numerical Methods in Eng.**, v.1, p. 1271-1290, 1977.

BOOIJ, N. Gravity Waves on Water with Non-uniform Depth and Currents. **Report n° 81-1**, Delft University of Technology, 1981, 131 p.

BOUSSINESQ, J. Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. **J. Math. Pures Appl.**, v.17, p.55–108, 1872.

CARNAHAN, B.; UTHER; H.A.; WILKES, J.O. **Applied Numerical Methods**. version traducida al castellano, Ed. Rueda, Madrid, 1969, 639 p.

CHU, V.C.; MEI, C.C. On Slowly Varying Stokes Waves. **J. Fluid Mech.**, 41, p. 873-887, 1970.

DALLY, W.R., DEAN; R.G.; DALRYMPLE, R.A. Wave Height Variation Across Beaches of Arbitrary Profile. **Journal of Geophysical Research**, 90, C6, p. 11917-11927, 1985.

DALRYMPLE, R.A., KIRBY; J.T.; HWANG, P.A. Wave Diffraction Due to Areas of Energy Dissipation. **Journal of Waterway, Port, Coastal e Ocean Engineering**, ASCE, v.110, n.1, p. 67-79, 1984.

DALRYMPLE, R.A.; KIRBY, J.T.; MANN, D.W. Wave Propagation in the Vicinity of Islands. In: Offshore Technology Conference, 16, 1984. **Proceedings...** Houston, p. 249-254, 1984.

DEAN, R.G.; DALRYMPLE, R.A. **Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1984.

DJORDJEVIC, V.D.; REDEKOPP, L.G. On the Development of Packets of Surface Gravity Waves Moving over e Uneven Bottom. **Z. Angew. Math. And Phys.**, v.29, p. 950-962, 1978.

GARCÍA, V. **Propagación del Oleaje: Aproximación parabólica de la Ecuación para Pendiente Suave.** Tesina de especialidad, E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, 1994.

HEDGES, T.S. An Empirical Modification to Lineal Wave Theory. **Proc. Institute of Civil Engineering**, v.61, p. 575-579, 1976.

HORIKAWA, K.; KUO, C.T. **A Study of Wave Transformation Inside Surf Zone.** In: International Conference on Coastal Engineering, 10, 1966. **Proceedings...** ASCE, New York, p. 217-233, 1966.

HOUSTON, J.R. Combined Refraction-Diffraction of Short Waves Using the Finite Element Method. **Applied Ocean Res.**, v.3. p. 163-170, 1981.

IH CANTABRIA – MMA. **Sistema de Modelagem Costeira, SMC – Brasil: Manual de Referência – Modelo de Propagação de Ondas Espectrais em Praias (OLUCA - SP).** Brasília: Ministério do Meio Ambiente. 2017a.

IH CANTABRIA – MMA. **Sistema de Modelagem Costeira, SMC – Brasil: Manual de Referência – Modelo de Correntes por Quebra em Praias (COPLA MC/SP).** Brasília: Ministério do Meio Ambiente. 2017b.

IH CANTABRIA – MMA. **Sistema de Modelagem Costeira, SMC – Brasil: Manual de Referência – Modelo de Erosão/Sedimentação de Praias (EROS).** Brasília: Ministério do Meio Ambiente. 2017c.

ITO, Y.; TANIMOTO, K. A Method of Numerical Analysis of Wave Propagation - Application to Wave Diffraction e Refraction. In: International Conference on Coastal Engineering, 13, 1972. **Proceedings...** ASCE, New York, p.502-522, 1972.

JONSSON, I.G.; SKOVGAARD, O. A mild-slope wave equation e its application to tsunami calculations. **Mar. Geodesy**, v.2, p. 41-58, 1979.

KIRBY, J.T. Propagation of weakly-nonlinear surface water waves in regions with varying depth e current. **ONR Tech. Rept.** 14, Res. Rept. CE-83- 37, Department of Civil Engineering, University of Delaware, Newark, 1983.

KIRBY, J.T.; DALRYMPLE, R.A. A Parabolic Equation for the Combined Refraction-Diffraction of Stokes Waves by Mildly Varying Topography. **J. Fluid Mech.**, v.136, p. 543-566, 1983a

KIRBY, J.T.; DALRYMPLE, R.A. The Propagation of Weakly Nonlinear Waves in the Presence of Varying Depth e Currents. In: I.A.H.R., 20, 1983b. **Proceeding...** Moscow, 1983b.

KIRBY, J.T. A Note on Linear Surface Wave-Current Interaction. **J. Geophys. Res.**, V.89, P.745-747, 1984.

KIRBY, J.T.; DALRYMPLE, R.A. Verification of a Parabolic Equation for Propagation of Weakly Non-Linear Waves. **Coastal Engineering**, p. 219-232, 1984.

KIRBY, J.T.; DALRYMPLE, R.A. Modifications to a Propagation Model for the Combined Refraction-Diffraction of Stokes Waves; Shallow Water, Large Angle e

Breaking Wave Effects. **Report UFL/COEL-85/001**, Coastal and Oceanographical Engineering Department, University of Florida, Gainesville, 1985.

KIRBY, J.T. Higher-order Approximations in the Parabolic Equation Method for Water Waves. **Journal of Geophysical Research**, v.91, C1, p. 933- 952, 1986a.

Kirby, J.T. Open Boundary Condition in Parabolic Equation Method. **Journal of Waterway, Port, Coastal e Ocean Engineering**, ASCE, v. 112, n. 3, p. 460-465, 1986b.

KIRBY, J.T.; DALRYMPLE, R.A. An Approximate Model for Nonlinear Dispersion in Monochromatic Wave Propagation Models. **Coastal Engineering**, v.9, p. 545-561, 1986a.

KIRBY, J.T.; DALRYMPLE, R.A. Modelling Waves in Surfzones and Around Islands. **Journal of Waterway, Port, Coastal e Ocean Engineering**, ASCE, v. 112, n. 1, p. 78-93, 1986b.

KOSTENSE, J.K.; DINGEMANS; M.W.; VAN DEN BOSCH, P. Wave-current Interaction in Harbours. In: International Conference on Coastal Engineering, 21., 1988. **Proceedings...** ASCE, Málaga, v.1, n.2, p. 32-46, 1988.

LEE, J.L.; WANG, H. Evaluation of Numerical Models on Wave- Current Interactions. of In: International Conference on Coastal Engineering, 23., 1992. **Proceedings...** ASCE, Venice, p. 432-446, 1992.

LIU, P.L.F.; DALRYMPLE, R.A. The Damping of Gravity Water Waves Due to Perculation. **Coastal Engineering**, 1984.

LIU, P.L.F.; TSAY, T.K. On Weak Reflection of Water Waves. **Journal Fluid Mech.**, v.131, p. 59-71, 1984.

LUKE, J.C. A Variational Principle for a Fluid with a Free Surface. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 27, n. 2, p. 395-397, 1967.

MACCAMY, R.D.; FUCHS, R.A. Wave Forces on Piles: a Diffraction Theory. **Tech. Memo**, 69, Beach Erosion Board, 1954.

MADSEN, P.A.; MURRAY, R.; SORENSEN, O.R. A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics **Coastal Engineering**, v.15, p. 371-388, 1991.

MASSEL, S.R. **Hydrodynamics of Coastal Zones**. Elsevier Amsterdam, Oceanography Series, 1989. 336 p.

PHILLIPS, O.M. **The Dynamics of the Upper Ocean**. Cambridge University, 1966. 261 p.

RADDER, A.C. On the Parabolic Equation Method for Water-Wave Propagation. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 95, n. 1, p. 159-176, 1979.

RODRÍGUEZ, M. Modelo Matemático de Propagación del Oleaje. **Tesina de especialidad**, E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Barcelona, 112 p, 1993.

---

SKOVGAARD, O.; JONSSON, I.G.; BERTELSEN, J.A. Computation of Wave Heights Due to Refraction e Friction. **Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Division**, ASCE, v.101, n. WW1, p. 15-31, 1975.

SOMMERFELD, A. Mathematische theorie der diffraction. **Math. Annalen**, v.47, p. 317-374, 1886.

SOUTHGATE, H.N. Review of Wave Breaking in Shallow Water. Paper Presented at the Society of Underwater Technology Conference on Wave Kinematics e Environmental Forces, London, H.R. Wallingford, 14 p, 1993.

STIVE, M.J.F. A Scale Comparison of Waves Breaking on a Beach. **Coastal Engineering**, v.9, p. 151-158, 1985.

USACE (U.S. Army Coastal Engineering Research Center, Corps of Engineers). **Shore Protection Manual**. Department of the Army, Vicksburg, Miss., vol I e II, 1984.

WEGGEL, J.R. Maximum Breaker Height. **Journal of Waterways, Port, Coastal e Ocean Engineering**, ASCE, v.98, n. WW4, p. 529-548, 1972.

YUE, D.K.P.; MEI, C.C. Forward Diffraction of Stokes Waves by a Thin Wedge. **Journal of Fluid Mechanics**, v.99, p.33-52, 1980.